Opción A

1.- Sean F_1, F_2, F_3, las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) **[0,5 puntos]** El determinante de B^{-1}.

b) **[0,5 puntos]** El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

c) **[0,5 puntos]** El determinante de 2B.

d) **[1 punto]** El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

2.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) **[1 punto]** Halla los valores del parámetro *m* para los que el rango de A es menor que 3

b) **[1,5 puntos]** Estudia si el sistema $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de *m* obtenidos en el apartado anterior.

3.- [2,5 puntos] Se considera la recta r definida por $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} x=\mu \\ y=\mu-1 \\ z=-1 \end{cases}$. Halla la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

4.- Dada la recta *r* definida por $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$

a) **[0,75 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a *r*.

b) **[0,75 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a *r*.

c) **[1 punto]** Dados los puntos A = (2, 1, 1) y B = (0, 0, 1), halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

Opción B

1.- Se sabe que el determinante de la matiz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es - 3. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) [1 punto] det(-2A) y det(A^{-1}).

b) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

2.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Discútelo según los valores del parámetro a.

b) **[1 punto]** Resuelve el caso a = 2.

3.- Sea la recta s dada por

$$\begin{cases} x-z=-1 \\ 2y-z=3 \end{cases}$$

a) **[1,25 puntos]** Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y contiene a la recta r, dada por x - 1=- y + 2=z - 3

b) **[1,25 puntos]** Estudia la posición relativa de la recta s y el plano π_2, de ecuación x + y = 3, y deduce la distancia entre ambos.

4.- Sean los vectores $\vec{u}$ = (1,-1,3), $\vec{v}$ = (1,0,-1) y $\vec{w}$ = (λ,1,0).

a) **[0,75 puntos]** Calcula los valores λ que hacen que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean ortogonales.

b) **[0,75 puntos]** Calcula los valores λ que hacen que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

c) **[1 punto]** Para λ = 1 escribe el vector $\vec{r}$ = (3, 0, 2) como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Opción A

1.- Sean F_1, F_2, F_3, las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:
a) [0,5 puntos] El determinante de B^{-1}.
b) [0,5 puntos] El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).
c) [0,5 puntos] El determinante de 2B.
d) [1 punto] El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

Solución:
a) Para calcular el determinante de B^{-1} utilizamos la propiedad de que el determinante de la matriz identidad vale 1:
$B.B^{-1} = I_3 \Rightarrow |B.B^{-1}| = |I_3| = 1$.

Por otro lado sabemos que el determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto del los determinantes de dichas matrices:
$|B|.|B^{-1}| = -2.|B^{-1}| \Rightarrow |B^{-1}| = -\frac{1}{2}$.

b) Para calcular el determinante de $(B^t)^4$ utilizamos la propiedad de que el determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto del los determinantes de dichas matrices:
$|(B^t)^4| = |B^t|^4 = (-2)^4 = 16$.

c) Para calcular el determinante de 2B utilizamos la propiedad de que si una fila está multiplicada por un número dicho número es factor común del determinante.
$|2B| = |(2F1, 2F2, 2F3)| \Rightarrow 2.2.2|(F1, F2, F3)| = 2^3(-2) = -16$.

d) Para calcular el determinante de la matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, 5F1 - F3, 3F3, F2 utilizamos las propiedades de que si:

- una fila está multiplicada por un número dicho número puede salir fuera del determinante factor común multiplicando al determinante
- si una fila de un determinante es suma de dos sumandos dicho determinante es igual a la suma de dos determinantes colocando en dicha fila el primer y segundo sumando respectivamente,
- si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales el determinante es cero,
- si una fila está multiplicada por un número dicho número puede salir fuera del determinante como factor común, multiplicando al determinante.

$|(5F1 - F3, 3F3, F2)| = |(5F1, 3F3, F2)| + |(-F3, 3F3, F2)| = 5.3.|(F1, F3, F2)| + 0 = -15.|(F1, F2, F3)| =$
$= (-15).(-2) = 30$.

Ejercicio 2. Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Halla los valores del parámetro *m* para los que el rango de A es menor que 3.

b) [1,5 puntos] Estudia si el sistema $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **tiene solución para cada uno de los valores de *m* obtenidos en el apartado anterior.**

Solución:
Si $|A| \neq 0$, el rango de la matriz A es 3. Vamos a calcularlo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos el determinante sacando factor común m en la 2ª y 3ª filas:

$$|A| = m.m. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

Restamos a la 2ª y 3ª filas la 1ª fila. Desarrollando finalmente por la primera columna:

$$|A| = m.m. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = m^2.(m-1)^2$$

Si $|A| = 0 \Rightarrow m^2(m-1)^2 = 0$, con soluciones dobles m = 0 y m = 1. El rango de A es menor de 3 si m = 0 y m = 1.

b) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$ y la ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 & 1 \\ m & m & m^2 & 1 \end{array}\right)$

- **Si m = 0 l**a matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ siendo rg(A) = 1

  y rg(A*) = 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. El Teorema de Rouché-Frobenius nos dice que el sistema es incompatible y no tiene solución.

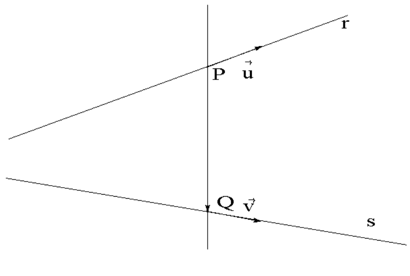
- **Si m = 1 l**a matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ siendo rg(A) = rg(A*) = 1. El Teorema de Rouché-Frobenius nos dice que el sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones. Como el rango es uno hay una única ecuación:
  $x + y + z = 1$.

  Parametrizamos tomando $y = \lambda$, $z = \mu$, y obtenemos como soluciones:
  $(1-\lambda-\mu, \lambda, \mu)$ con $\lambda, \mu \in R$.

3.- [2,5 puntos] Se considera la recta r definida por $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases}$. Halla la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

Solución:

Vamos a resolverlo calculando los puntos de intersección P y Q de la recta t con las rectas r y s.



La recta r pasa por el punto A = (1, 1, -2) y tiene como vector director $\vec{u} = (0, 0, 1)$, luego un punto genérico de r es $P = (1, 1, \lambda-2)$.

La recta s pasa por el punto B = (0, -1, -1) y tiene como vector director $\vec{v} = (1, 1, 0)$, luego un punto genérico de s es $Q = (\mu, \mu -1,-1)$.

Formamos el vector $\overrightarrow{PQ} = (\mu -1, \mu -2,- \lambda+1)$ y le obligamos a que sea perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir que su producto escalar con ambos sea nulo:

$\overrightarrow{PQ} . \vec{u} = 0 = (\mu -1, \mu -2,- \lambda+1).(0,0,1) = - \lambda+1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ y el punto es P = (1, 1, -1)

$\overrightarrow{PQ} . \vec{v} = 0 = (\mu -1, \mu -2,- \lambda+1).(1,1,0) = \mu -1 + \mu -2 = 2\mu - 3 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{3}{2}$ y el punto es $Q = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$

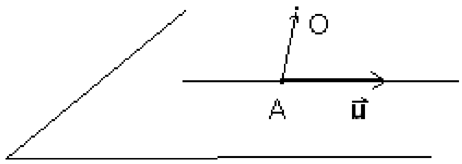
La recta pedida es la que pasa por P = (1, 1, -1) y tiene como vector director $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right)$, uno proporcional es (1, -1, 0).
La ecuación de la recta t perpendicular a ambas pedida en paramétricas es

$$\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 1-\alpha \\ z = 1 \end{cases} \text{ con } \alpha \in R$$

Ejercicio 4. Dada la recta *r* definida por $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$

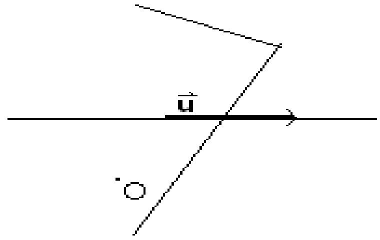
a) [0,75 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a *r*.
b) [0,75 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a *r*.
c) [1 punto] Dados los puntos A = (2, 1, 1) y B = (0, 0, 1), halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

Solución:
a) A partir de la ecuación de la recta observamos que pasa por el punto A = (1, -1, 2) y tiene como vector director $\vec{u}$ = (2, 3, 1).
Para hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r, consideramos el punto O = (0, 0, 0) y los vectores directores $\overrightarrow{OA}$ = (1, -1, 2) y $\vec{u}$ = (2, 3, 1).



El plano pedido es:

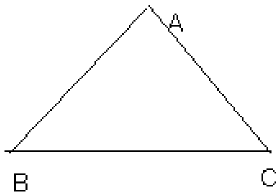
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7x-3y+(-5)z = 7x-3y-5z = 0$$



b) Para hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a *r* consideramos su vector característico $\vec{n}$ que coincide con el vector director de la recta $\vec{u}$ = (2, 3, 1). Su ecuación será:
2x + 3y + z + K = 0

Obligamos a que pase por el origen O=(0,0,0) y tenemos que:
$0+0+0+K = 0 \Rightarrow K = 0$
El plano pedido es:

$$\boxed{\pi \equiv 2x + 3y + z = 0}$$



c) Como el punto C está en el eje OX, es de la forma C= (a, 0, 0). Sabemos que el área de un triángulo es ½ del módulo del producto vectorial de dos vectores con origen común, es decir:
$\overrightarrow{AB}$ = (-2, -1, 0)
$\overrightarrow{AC}$ = (a-2, -1, -1)

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ a-2 & -1 & -1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-2)^2+a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5+a^2}\ u^2$$

Según el enunciado del problema:

$$\frac{1}{2}\sqrt{5+a^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{5+a^2} = 4 \Rightarrow 5+a^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 11 \Rightarrow a^2 = 11 \Rightarrow a = \pm\sqrt{11}$$

Los posibles puntos solución son: $C_1 = \left(\sqrt{11}, 0,\ 0\right)$ y $C_2 = \left(-\sqrt{11}, 0,\ 0\right)$

Opción B

1.- Se sabe que el determinante de la matiz A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es - 3. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) [1 punto] det(-2A) y det(A^{-1}).

b) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ **y** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

Solución:

a) Como $|k\cdot A| = k^n.|A|$ tenemos que:

$|-2A| = (-2)^3.|A| = -8.3 = -24$

Como el producto de una matriz por su inversa es la identidad $A^{-1}\cdot A = I$ y el determinante de un producto es el producto de determinantes $|A.B| = |A|.|B|$ tenemos que:

$|I| = |A^{-1}|\cdot|A| \Rightarrow 1 = |A^{-1}|\cdot|A| \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{-3} = \dfrac{-1}{3}$

b) Utilizando las propiedades:

- Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante
- Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 7.2.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -14.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -14\text{-}3 = -42$$

Utilizando las propiedades:

- Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el
- primer y segundo sumando respectivamente.
- Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante
- Si un determinante tiene dos filas proporcionales, dicho determinante vale 0.
- El determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 5a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 5.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} +0 = 5.(-3) = -15$$

2.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Discútelo según los valores del parámetro a.

b) [1 punto] Resuelve el caso a = 2.

Solución:

a) La matriz del sistema es A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada A*= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $|A| \neq 0$, rango(A) = rango(A^*) = 3. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -(a-2)(a-1)$

Resolvemos $|A| = 0$, es decir $(a - 2)(a - 1) = 0$, de donde a = 1 y a = 2

- *Si* ***a ≠ 1 y a ≠ 2*** *, tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouché el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

- Si a = 1, A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A*= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ -1 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

  En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3

  Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

- Si a = 2, A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y A*= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

  En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, porque dos columnas son iguales, tenemos rango(A^*) = 2

  Como rango(A)= rango(A^*) = 2, por el teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado.

b) Como vimos en el apartado anterior es un sistema compatible indeterminado. Tenemos dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales.

$x + y + z = 1$

$2x + y + 2z = 2.$

Tomamos $z = \lambda \in R$

$x + y = 1- \lambda$

$2x + y = 2- 2\lambda$

Restamos ambas ecuaciones y tenemos

$x = 1- \lambda$

Sustituyendo en x + y + z = 1, nos resulta:

y = 0.

La solución del sistema es:

(x, y, z) = (1-λ , 0, λ) con $\lambda \in R$

3.- Sea la recta s dada por $\begin{cases} \mathbf{x- z = -1} \\ \mathbf{2y- z = 3} \end{cases}$

a) [1,25 puntos] Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y contiene a la recta r, dada por x - 1 = - y + 2 = z – 3
b) [1,25 puntos] Estudia la posición relativa de la recta s y el plano π_2, de ecuación x + y = 3, y deduce la distancia entre ambos.

Solución:

a) La recta s de ecuación $\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$, viene dada como intersección de dos planos. Vamos a obtener un punto y un vector directo suyos.

Para el punto tomamos y = 0, de donde z = 3 y x = 2. Punto A(2,0,3)

El vector director lo vamos a dar como el producto vectorial de los vectores normales de cada plano.

$$\vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 1.\vec{j} + 2.\vec{k} = (2, -1, 2)$$

La recta r, dada por x - 1 = - y + 2 = z – 3 la ponemos en forma continua (Observa que la y va multiplicada por -1) . Su ecuación en forma continua es $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$, por tanto un punto suyo es B = (1, 2, 3) y un vector director es $\vec{d_r}$ = (1, -1,1).

Como me piden un plano p_1 que sea paralelo a la recta s y que contenga a la recta r, tomamos para el plano el punto B de la recta r y los vectores $\vec{d_r}$ y $\vec{d_s}$

Las ecuaciones paramétricas del plano serían

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 - \lambda - \mu \\ z = 3 + \lambda + 2\mu \end{cases} \text{ con } \lambda, \mu \in R$$

El plano en forma general sería

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (x-1)(1) - (y-2)(0) + (z-3)(1) = -x + z - 2 = 0$$

b) Para estudiar la posición relativa de la recta s y el plano $\pi_2 \equiv$ x + y = 3, ponemos la recta en paramétricas la sustituimos en el plano y resolvemos la ecuación que nos salga.

Con el punto A(2,0,3) y el vector directo $\vec{d_s}$ = (2, -1, 2) las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en el plano π_2 nos queda
(2 + 2λ) + (0 - λ) = 3, de donde λ = 1

Por lo tanto la recta s corta al plano π_2 en el punto C(2 + 2(1), -(1), 3 + 2(1)) = C(4, -1, 5).
Como la recta corta al plano la distancia de la recta al plano es nula.

4.- Sean los vectores $\vec{u}$ = (1,-1,3), $\vec{v}$ = (1,0,-1) y $\vec{w}$ = (λ,1,0).
a) [0,75 puntos] Calcula los valores λ que hacen que hacen que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean ortogonales.
b) [0,75 puntos] Calcula los valores λ que hacen que hacen que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.
c) [1 punto] Para λ = 1 escribe el vector $\vec{r}$ = (3, 0, 2) como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Solución:

a) Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales su producto escalar es nulo:
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda - 1 + 0 = 0 \Rightarrow$ **λ = 1.**

b) Los vectores son linealmente independientes si el rango de la matriz formada por sus coordenadas es 3, es decir si $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda(1-0) - 1(-1-3) + 0 = \lambda + 4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = -4}$$

Luego si $\lambda \neq -4$, los vectores son linealmente independientes.

c) *Si nos fijamos no hay que efectuar ningún desarrollo porque al sumar los tres vectores* $\vec{u}$ **,** $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$*, obtenemos el vector* $\vec{r}$ **.**

Sabemos que el vector $\vec{r}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ **,** $\vec{v}$ **y** $\vec{w}$ si existen números reales a, b y c, no todos nulos tales que $\vec{r} = a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{v} + c\cdot\vec{w}$**,** es decir:
$(3,0,2) = a\cdot(1,-1,3) + b\cdot(1,0,-1) + c\cdot(1,1,0) = (a,-a,3a) + (b,0,-b) + (c,c,0) = (a+b+c,-a+c,3a-b)$.

Igualando miembro a miembro tenemos el sistema

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ -a \quad +c=0 \\ 3a-b \quad =2 \end{cases}$$

Despejando b y c en función de a en la 2ª y 3ª ecuaciones obtenemos:

$$\begin{cases} c=a \\ b=3a-2 \end{cases}$$

Que sustituimos en la 1ª ecuación

$a+3a-2+a = 3 \Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow a = 1$

Sustituyendo valores en la expresión de b y c:
c= 1
b= 3-2 = 1

Luego queda que:
$\boldsymbol{\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}}$

EXAMEN DE MATEMATICAS II 3ª ENSAYO

Apellidos: ___________________________ Nombre: ________________

Curso: 2º Grupo: A Día:____________ CURSO 2015-16

Instrucciones:	a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS. b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B** c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara. d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

Opción A

Ejercicio 1.- Sabiendo que el determinante de una matriz A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) [**1 punto**] det(−2A) y det(A^{-1}).

b) [1**,5 puntos**] $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

Ejercicio 2.- Considera las matrices

A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

a) [**0,75 puntos**] Halla A^{-1}.

b) [**1,25 puntos**] Calcula la matriz X que satisface AX = B^tC (B^t es la matriz traspuesta de B).

c) [**0,5 puntos**] Halla el determinante de $A^{2013}B^tB(A^{-1})^{2013}$.

Ejercicio 3.- [**2,5 puntos**] Calcula la distancia entre las rectas
r ≡ x = y = z y s ≡ x − 1 = y − 2 = z − 3.

Ejercicio 4.- [**2,5 puntos**] Considera las rectas

r ≡ x = y = z, s ≡ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ y t ≡ $\begin{cases} 1+2\lambda \\ 3\lambda \\ -1+\lambda \end{cases}$

Halla la recta que corta a r y a s y es paralela a t.

Opción B

Ejercicio 1.- Sea la matriz

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$.

(a) [1 punto] ¿Para qué valores del parámetro *k* no existe la inversa de la matriz *A*? Justifica la respuesta.

(b) [1'5 puntos] Para *k* = 0, resuelve la ecuación matricial (*X* +*I*) ·*A* = A^t, donde *I* es la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

Ejercicio 2.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = \lambda + 1 \\ 3y + 2z = 2\lambda + 3 \\ 3x + (\lambda - 1)y + z = \lambda \end{cases}$$

(a) [1 punto] Resuelve el sistema para λ = 1.

(b) [1 punto] Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.

(c) [0'5 puntos] ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$?

Ejercicio 3.- Sean *r* y *s* las rectas dadas por

$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases}$ $s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$

(a) [1'25 puntos] Determina el punto de intersección de ambas rectas.

(b) [1'25 puntos] Calcula la ecuación general del plano que las contiene

Ejercicio 4.- De un paralelogramo *ABCD* conocemos tres vértices consecutivos: *A*(2*;*−1*;* 0)*; B*(−2*;* 1*;* 0) y *C*(0*;* 1*;* 2).

(a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

(b) [0'75 puntos] Halla el área de dicho paralelogramo.

(c) [0'75 puntos] Calcula el vértice *D*.

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Opción A

Ejercicio 1.- Sabiendo que el determinante de una matriz A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) [1 punto] det(−2A) y det(A^{-1}).

b) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

Solución:

a) Para calcular |-2A| utilizamos la propiedad de que dada una matriz cuadrada de orden n $|kA| = k^n|A|$

$|-2A| = (-2)^3|A| = (-2)^3.4 = -8.4 = -32$

Para calcular $|A^{-1}|$ utilizamos que el producto de una matriz por su inversa es la identidad, hallamos el determinante de la matriz identidad:

$AA^{-1} = I \Rightarrow |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |I| = 1$

despejando en dicha expresión:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

b) Aplicando la propiedad de que si una fila de un determinante está multiplicada por un número, podemos sacar factor común los números que multiplican la 2ª fila y columnas respectivamente:

$$\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -2.4 = -8$$

Aplicando la propiedad anterior y permutando después la 1ª y 2ª filas, utilizando la propiedad de que si permutamos entre si dos columnas de un determinante, el determinante cambia de signo:

$$\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = -3.(-1)\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3.4 = -12$$

Ejercicio 2.- Considera las matrices

A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

a) [0,75 puntos] Halla A^{-1}.

b) [1,25 puntos] Calcula la matriz X que satisface $AX = B^tC$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

c) [0,5 puntos] Halla el determinante de $A^{2013}B^tB(A^{-1})^{2013}$.

Solución:

a) Para hallar A^{-1} utilizamos la definición:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A^t)$$

Siendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0+0+0)-(0+0+2) = -2$$

Obtenemos la matriz traspuesta:

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de los adjuntos de la traspuesta será:

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego la inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Como existe matriz inversa A^{-1} multiplicamos la ecuación por la izquierda por A^{-1}:

$A^{-1}\cdot AX = A^{-1}B^tC \Rightarrow X = A^{-1}B^tC$

Sustituyendo valores obtenemos:

$$X = A^{-1}B^tC = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

c) El determinante pedido es:

$|A^{2013}.B^tB.(A^{-1})^{2013}| = |A^{2013}|.|B^tB|.|(A^{-1})^{2013}|$ [1]

Donde hemos aplicado que $|M.N| = |M|.|N|$

Hallamos primero B^tB y después su determinante:

$$B^tB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B^tB| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (8+0+0)-(0+4+4) = 0$$

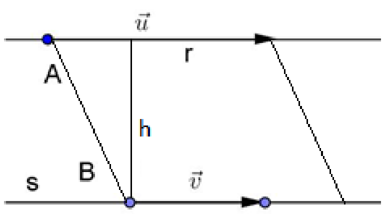
Aplicamos luego a [1]:

$|A^{2013}.B^tB.(A^{-1})^{2013}| = |A^{2013}|.0.\ |(A^{-1})^{2013}| = 0$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula la distancia entre las rectas
$r \equiv x = y = z$ y $s \equiv x - 1 = y - 2 = z - 3$.

Solución:

La recta r pasa por el punto A = (0, 0, 0) y tiene como vector director $\vec{u} = (1, 1, 1)$. La recta s pasa por el punto B = (1, 2, 3) y tiene como vector director $\vec{v} = (1, 1, 1)$. Por lo tanto ambas rectas son paralelas, luego calcularemos la distancia entre ellas como altura del paralelogramo formado por el vector $\vec{u}$, director de la recta r, el vector $\overrightarrow{AB}$ que une los puntos de ambas rectas y los paralelos a ellos trazados por sus extremos.



$$d(r, s) = d(A, r) = |\overrightarrow{AR}| = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Restando las coordenadas de A y B obtenemos las del vector $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3)$

$$d(r, s) = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\|}{|(1,\ 1,\ 1)|} = \frac{|(-1, 2, -1)|}{|(1,1,1)|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \text{ u.}$$

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Considera las rectas

r ≡ x = y = z, s ≡ $\begin{cases} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y = 1} \end{cases}$ **y t ≡** $\begin{cases} \mathbf{1 + 2\lambda} \\ \mathbf{3\lambda} \\ \mathbf{-1 + \lambda} \end{cases}$

Halla la recta que corta a r y a s y es paralela a t.

Solución:

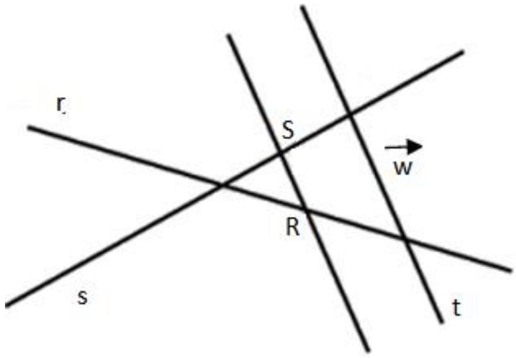
La recta r tiene como ecuación continua $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$, luego un punto genérico de dicha recta es R = (λ, λ, λ). La recta s tiene como ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = \mu \end{cases}$$

Un punto genérico de dicha recta es S = (2, 1, μ).

Como la recta pedida corta a ambas rectas su vector director es $\overrightarrow{RS}$ = (2-λ, 1-λ, μ-λ). Como la recta pedida es paralela a la recta t, su vector director es paralelo al de ésta, $\vec{w}$ = (2, 3, 1). Por lo tanto $\overrightarrow{RS}$ y $\vec{w}$ son proporcionales:

$$\frac{2-\lambda}{2} = \frac{1-\lambda}{3} = \frac{\mu-\lambda}{1}$$



Dando lugar a las ecuaciones:

3(2-λ) = 2(1-λ) $\Rightarrow$ 6-3λ = 2-2λ $\Rightarrow$ 6-2 = 3λ-2λ $\Rightarrow$ λ= 4

2-λ = 2(μ-λ) $\Rightarrow$2-4 = 2μ-8 $\Rightarrow$ 2μ = 6 $\Rightarrow$ μ = 3

La recta pasa por el punto R = (2,2 2) y tiene como vector director $\vec{w}$ = (2, 3, 1):

$$\boxed{\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{1}}$$

Opción B

Ejercicio 1.- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{k} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

a) [1 punto] ¿Para qué valores del parámetro *k* no existe la inversa de la matriz *A*? Justifica la respuesta.

b) [1,5 puntos] Para *k* = 0, resuelve la ecuación matricial (*X* +*I*) ·*A* = A^t, donde *I* denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) Para hallar qué valores del parámetro k hacen no exista matriz inversa calculamos el determinante, |A| y obligamos a que sea nulo. Calculamos el determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = (0+0+2k) - (1+0+0) = 2k-1 \ [1]$$

Si $|A| = 0 \Rightarrow 2k -1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$. Luego la matriz A no tiene inversa si $k = \frac{1}{2}$.

b) En el apartado anterior hemos averiguado que para k = 0 la matriz A tiene inversa, luego podemos multiplicar la ecuación por la derecha por la inversa de la matriz A y a continuación restar la matriz identidad en ambos miembros:

$(X + I)\cdot A.A^{-1} = A^{t}\cdot A^{-1} \Rightarrow (X + I) = A^{t}\cdot A^{-1} \Rightarrow X = A^{t}\cdot A^{-1}-I$

Sustituyendo k = 0 en la expresión [1] del apartado anterior hallamos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es $|A|= 2.0-1 = -1$

Como es no nulo exista la matriz inversa, A^{-1}, que calculamos su inversa aplicando la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^{t})$$

Obtenemos la matriz traspuesta:

$$A^{t} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de los adjuntos de la traspuesta será:

$$Adj(A^{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego la inversa de A es:

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación anterior:

$$X = A^{t}\cdot A^{-1}-I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = \lambda + 1 \\ 3y + 2z = 2\lambda + 3 \\ 3x + (\lambda - 1)y + z = \lambda \end{cases}$$

a) [1 punto] Resuelve el sistema para λ = 1.

b) [1 punto] Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.

c) [0,5 puntos] ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$?

Solución:

a) Sustituimos valores y obtenemos la matriz del sistema y ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como los determinantes de orden 2 y 3 valen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3+6-0)-(9+0+0) = 0, \text{ rango}(A) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3+15+0) -(18+0+0) = 18-18 = 0, \text{ rango}(A^*) = 2$$

Como rango(A) = rango(A) = 2 < nº incógnitas, por el teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.* Como el rango es 2, una de ellas es combinación lineal de las otras dos, sólo necesitamos 2 ecuaciones. Tomamos la 1ª y la 2ª siendo z = λ:

$$\begin{cases} x+y = 2-\lambda \\ 3y = 5-2\lambda \end{cases}$$

En la 2ª ecuación queda: y = $\frac{5}{3} - \frac{2\lambda}{3}$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: x = 2-λ-y = 2-λ-$\frac{5}{3} - \frac{2\lambda}{3} = \frac{1}{3} - \frac{\lambda}{3}$

La solución es:

(x, y, z) = $\left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{3}, \frac{5}{3} - \frac{2\lambda}{3}, \lambda\right)$ con $\lambda \in R$.

b) Para halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución consideramos la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 3 & 2 & 2\lambda+3 \\ 3 & \lambda-1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Para que haya solución única según el Teorema de Rouché-Frobenius el sistema ha de ser compatible y determinado, luego rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas. Para ello basta con que el determinante de la matriz del sistema sea no nulo, |A| ≠ 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} = (3+6-0)-(9+2\lambda-2+0) = -2\lambda+2$$

Luego **el sistema tiene solución única si** λ ≠ **1**.

c) Para ver si existe algún valor de λ para que el sistema admita la solución $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ debemos sustituir dichos valores en las ecuaciones del sistema y ver si es cierto. Sustituimos:

$-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} = \lambda+1 \Rightarrow 0 = \lambda+1 \Rightarrow \lambda = -1$

$-\frac{1}{2}.0+0+2.\frac{1}{2} = 2\lambda+3 \Rightarrow 1 = 2\lambda+3 \Rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1$

$3.\left(-\frac{1}{2}\right)+0+\frac{1}{2} = \lambda \Rightarrow -1 = \lambda$

Luego el valor buscado es **λ = -1**

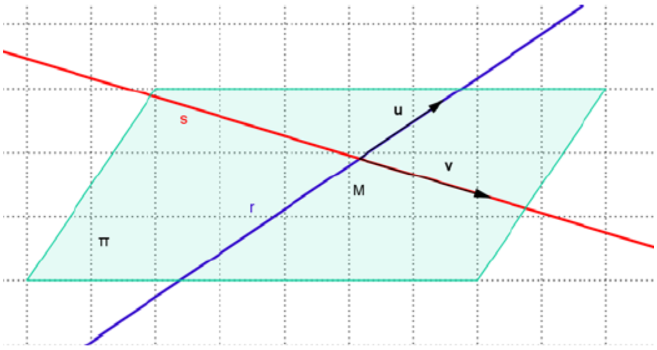
Ejercicio 3.- Sean *r* y *s* las rectas dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$$

a) [1,25 puntos] Determina el punto de intersección de ambas rectas.
b) [1,25 puntos] Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

Solución:

a) Para determinar el punto de intersección de ambas rectas en primer lugar ponemos las ecuaciones de ambas en paramétricas.



Para r tomamos z = λ∈R:

$$\begin{cases} x+y=6+\lambda \\ x=3-\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en la primera ecuación tenemos:

y = 6+λ-(3-λ) ⇒ y = 3 + 2λ.

$$r \equiv \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=3+2\lambda, \ \lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}$$

Un punto es A = (3,3,0) y un vector director es $\vec{u}$ = (-1, 2, 1).

En la recta s tomamos el punto B = (1,-1,0) y el vector director $\vec{v}$ = (-1,6,2).

$$s \equiv \begin{cases} x=1-\mu \\ y=-1+6\mu, \ \mu\in R \\ z=2\mu \end{cases}$$

Para determinar el punto de corte M, igualamos ambas rectas y resolvemos el sistema formado:

$$\begin{cases} 3-\lambda=1-\mu \\ 3+2\lambda=-1+6\mu \\ \lambda=2\mu \end{cases}$$

Sustituimos el valor obtenido de λ en la 3ª ecuación en la 1ª quedando:

3-2μ = 1-μ ⇒ μ = 2, luego λ = 2μ = 4

Comprobamos que verifica la 2ª ecuación:

3+2.4 = -1+6.2

Como es cierto, el punto de corte de las rectas es:

M=(3-4, 3+2.4, 4) ⇒ **M = (-1, 11, 4)**

b) Calculamos la ecuación general del plano que contiene ambas rectas. Para ello necesitamos un punto, que será M = (-1, 11, 4) y dos vectores linealmente independientes que serán los vectores directores de las rectas, $\vec{u}$ = (-1, 2, 1) y $\vec{v}$ = (-1,6,2). Luego tiene de ecuación:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-11 & z-4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (4-6)(x+1)-(-2+1)(y-11)+(-6+2)(z-4) = -2x + y - 4z + 3 = 0$$

El plano pedido es

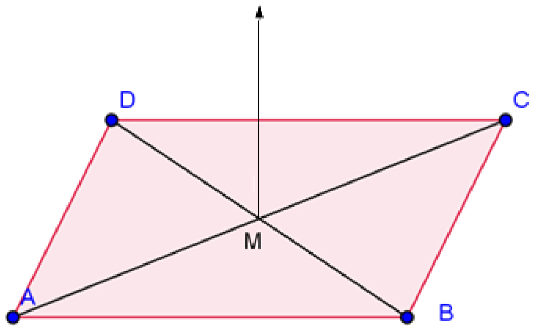
π ≡ 2x-y+4z-3 = 0

Ejercicio 4.- De un paralelogramo *ABCD* conocemos tres vértices consecutivos: *A* = (2,-1, 0), *B* = (-2,1,0) y *C* = (0, 1, 2).
a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
b) [0,75 puntos] Halla el área de dicho paralelogramo.
c) [0,75 puntos] Calcula el vértice *D*.

Solución:

a) Para calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene hallamos el centro del paralelogramo, M, que sabemos que es el punto medio de dos vértices no consecutivos, por ejemplo A y C:

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1, 0, 1)$$



El vector director de la recta r es uno perpendicular al plano, por ejemplo el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ = (-2-2, 1-(-1), 0-0) = (-4, 2, 0) y $\overrightarrow{AC}$ = (0-2, 1-(-1), 2-0) = (-2, 2, 2).

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k} = (4, 8, -4)$$

Tomamos uno paralelo a éste $\vec{u}$ = (4, 8, -4) y la ecuación de r en forma continua es:

$$\mathbf{r} \equiv \boxed{\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-1}{-1}}$$

b) Sabemos que el área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial de dos vectores con origen común. Tomamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ = (-4, 2, 0) y $\overrightarrow{AD}$ = (4-2,-1-(-1), 2-0) = (2, 0, 2), obtenemos:

$$\left|\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} = (4, 8, -4)$$

por lo tanto:

$$\text{Área} = \left|\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{4^2 + 8^2 + (-4)^2} = \sqrt{96}\ u^2$$

c) Tomamos como coordenadas de D = (x, y, z). Si ABCD es un paralelogramo, los vectores $\overrightarrow{AB}$ = (-4,2,0) y $\overrightarrow{DC}$ = (0-x, 1-y, -2-z) tienen las mismas coordenadas, porque son iguales como representantes del mismo vector libre. Igualando coordenadas obtenemos:

$0-x = -4 \Rightarrow x = 4$
$1-y = 2 \Rightarrow y = -1$
$2-z = 0 \Rightarrow z = 2.$

El punto pedido es D(4,-1,2).