Opción A

1.- Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) **[1 punto]** Determina los valores de m∈R para los que la matriz A tiene inversa.

b) **[1,5puntos]** Para m = 0 y siendo X = (x y z), resuelve X·A = (3 1 1).

2.- Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y-z = -4 \\ 3x+\lambda y+z = \lambda-1 \\ 2x+\lambda y = -2 \end{cases}$$

a) **[1,25 puntos]** Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

b) **[1,25 puntos]** Resuelve el sistema para λ = 1.

3.- Los puntos A(−2, 3, 1), B(2, −1, 3) y C(0, 1, −2) son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD.

a) **[1 punto]** Halla las coordenadas del vértice D.

b) **[1 punto]** Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.

c) **[0,5 puntos]** Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

4.- Considera el punto P(1,0,-2), la recta r definida por $\begin{cases} x-2y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$ y el plano π de ecuación 2x+y+3z–1=0

a) **[1,25 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a r y es perpendicular a π.

b) **[1,25 puntos]** Halla la ecuación de la recta que pasa por P, corta a r y es paralela a π.

Opción B

1.- Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) **[1 punto]** Determina los valores de λ para los que la matriz A − 2I tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) **[1,5 puntos]** Para λ = −2, resuelve la ecuación matricial AX = 2X + I.

2.- Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) **[1,25 puntos]** ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

b) **[1,25 puntos]** Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

3.- Dada la recta r definida por $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3$ y la recta s definida por $\begin{cases} x = 1 \\ 2y-z = 2 \end{cases}$

a) **[1,25 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.

b) **[1,25 puntos]** Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.

4.- Sea el punto P(2,3, -1) y la recta r dada por las ecuaciones $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

a) **[1 punto**] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P .

b) **[1,5 puntos]** Calcula la distancia del punto P a la recta r y determina el punto simétrico de P respecto de r.

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Opción A

1.- Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{m+1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Determina los valores de m∈R para los que la matriz A tiene inversa.
b) [1,5 puntos] Para m = 0 y siendo X = (x y z), resuelve X·A = (3 1 1).

Solución:
a) La matriz tendrá inversa si y solo si su determinante asociado es no nulo. Para obtenerlo sumamos a la 1ª columna la 3ª y restamos la 3ª columna a la 2ª y desarrollamos dicho determinante en la 1ª fila:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & m & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & m \\ m+1 & 2 \end{vmatrix} = -(6-m^2-m) = m^2+m-6$

Que será nulo si:
$m = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2}$
con soluciones m = -3 y m = 2. Por lo tanto la matriz A tiene inversa si m∈R{-3, 2}.

b) Para resolver X·A = (3 1 1) multiplicamos por la derecha por la inversa de A:
$X \cdot A . A^{-1} = (3\ 1\ 1).A^{-1} \Rightarrow X = (3\ 1\ 1).A^{-1}$

Calculamos la inversa de A:
$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)$

Sustituyendo m = 0 en |A| obtenemos que:
$|A| = 0^2+0-6 = -6$
luego tiene inversa.

Calculamos la matriz:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos la traspuesta:
$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos la matriz de adjuntos de su traspuesta:
$\mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

La matriz pedida es:
$A^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Por lo tanto:
$X = (3\ 1\ 1).A^{-1} = (3\ 1\ 1).\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}(12\ 6\ 6) = (2\ 1\ 1)$

2.- Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \mathbf{x+y-z = -4} \\ \mathbf{3x+\lambda y+z = \lambda-1} \\ \mathbf{2x+\lambda y = -2} \end{cases}$$

a) [1,25 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
b) [1,25 puntos] Resuelve el sistema para λ = 1.

Solución

a) Para clasificar el sistema según los valores del parámetro λ consideramos la matriz del sistema y la ampliada:

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & \lambda & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$ y A* = $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & \lambda & 1 & \lambda-1 \\ 2 & \lambda & 0 & -2 \end{array}\right)$

Calculamos el determinante de la matriz aplicando la regla de Sarrus:

|A| = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & \lambda & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \end{vmatrix}$ = (0+2-3λ) – (-2λ+λ+0) = -2λ+2

Que se anula si:

-2λ+2 = 0 ⇒ λ = 1

- **Si λ ≠ 1**
  Rango(A) = rango(A*) = 3 por lo tanto aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible y determinado.

- **Si λ = 1**
  La matriz del sistema y ampliada se convierten en:

  A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y A* = $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$

  |A| = -2+2 = 0 y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ = 1-3 = -2 ≠ 0, por lo tanto rango (A) = 2.

  Consideramos el determinante formado por las 1ª 2ª y 4ª columnas de la matriz ampliada y lo calculamos aplicando la regla de Sarrus:

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ = (-2+0-12)-(-8+0-6) = 0

  Por lo tanto rango (A*) = 2. Aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible indeterminado.

b) En el apartado anterior habíamos hallado que el sistema es compatible indeterminado. Como el rango es dos sobra una de las ecuaciones que es combinación lineal de las otras dos. Eliminando la primera queda y tomando z = λ como parámetro queda:

$\begin{cases} 3x + y = -\lambda \\ 2x + y = -2 \end{cases}$

Restando ambas ecuaciones obtenemos:

x = 2-λ

Que sustituyendo en la 2ª nos da:

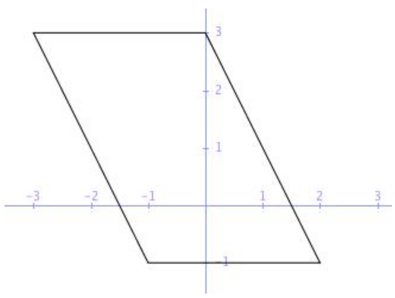
y = -2-2x = -2-2(2-λ) = -6+2λ

Obtenemos como solución:

(x, y, z) = (2-λ, -6+2λ, λ) con λ∈R.

3.- Los puntos A(−2, 3, 1), B(2, −1, 3) y C(0, 1, −2) son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD.
a) [1 punto] Halla las coordenadas del vértice D.
b) [1 punto] Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.
c) [0,5 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

Solución:



a) Si ABCD son los vértices de un paralelogramo. Los vectores libres AB y DC son iguales. Como:
$\overrightarrow{AB}$ = (4, -4, 2) y $\overrightarrow{DC}$ = (-x, 1 -y, -2 -z)
Igualando coordenadas tenemos:
4 = -x ⇒ x = -4
-4 = 1-y ⇒ y = 5
2 = -2-z ⇒ z = -4.

El punto que falta es **D(-4, 5, -4)**

b) La recta pasa por el punto el B(2,-1,3) y tiene como vector director $\overrightarrow{AC}$ = (2,-2, -3). Su ecuaciones paramétricas son:
$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1-2\lambda \\ z = 3-3\lambda \end{cases}$ con λ∈R.

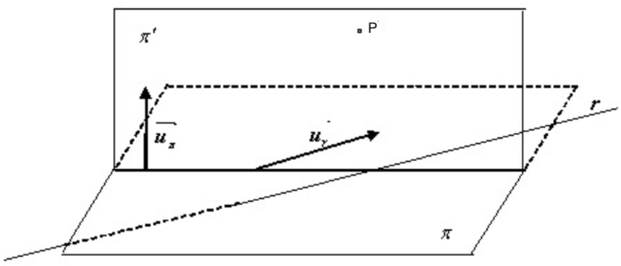
c) Para hallar la ecuación del plano tomamos el punto (2,-1,3) y los vectores directores $\overrightarrow{BA}$ = (-4,4,-2) y $\overrightarrow{BC}$ = (-2,2,5). Su ecuación paramétrica es
$\begin{cases} x = 2 - 4\lambda - 2\mu \\ y = -1 + 4\lambda + 2\mu \\ z = 3 - 2\lambda - 5\mu \end{cases}$ con λ, μ∈R.

Su ecuación general la calculamos mediante el determinante:
$\begin{vmatrix} x-2 & -4 & -2 \\ y+1 & 4 & 2 \\ z-3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$ (x-2)- $\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$ (y+1)+ $\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$(z-3) = 0 ⇒ 16(x+y-1) = 0

Queda la ecuación: **x+y-1 = 0**

4.- Considera el punto P(1,0,-2), la recta r definida por $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$ y el plano π de ecuación 2x+y+3z–1=0
a) [1,25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a r y es perpendicular a π.
b) [1,25 puntos] Halla la ecuación de la recta que pasa por P, corta a r y es paralela a π.

Solución:
a) La ecuación del plano π' que pasa por P, es paralelo a r y es perpendicular a π tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal al plano.

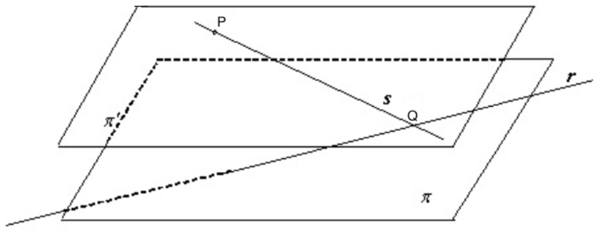


Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta r tomando y = λ:
$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ con λ∈R.
Es decir es una recta con vector director $\vec{v}$ = (2, 1,-1).
El vector normal del plano es $\vec{n}$ = (2,1,3).

La ecuación general del plano π' la calculamos mediante el determinante:
$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ (x-1)- $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ y+ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ (z+2) = 0 ⇒ 4(x-1)-8y+0. (z+2) = 0 ⇒ 4x-8y-4 = 0

Queda la ecuación:
π': x-2y-1 = 0

b) Construimos un plano π' paralelo a π y obligamos que contenga a P(1,0,-2):
$2x+y+3z+D = 0 \Rightarrow 2.1 + 0 + 3(-2) + D = 0 \Rightarrow D = 4$
π': $2x+y+3z+4 = 0$



Obligamos a que el nuevo plano π' corte a la recta r y obtenemos el punto Q:
$2(1+2\lambda)+\lambda+3(2-\lambda)+4 = 0 \Rightarrow 2+4\lambda+\lambda+6-3\lambda+4 = 0 \Rightarrow 2\lambda+12 = 0 \Rightarrow \lambda = -6$

El punto de corte, Q, es: (1-12,-6, 2+6) = (-11, -6, 8)

La recta que buscamos pasa por P y Q, luego su vector director es $\overrightarrow{PQ}$:
$\overrightarrow{PQ}$ = (-11-1, -6-0, 8+2) = (-12,-6, 10) = -2(6, 3,-5)

La recta r tiene como ecuaciones paramétricas
$\begin{cases} x = 1 + 6\mu \\ y = 3\mu \\ z = -2 - 5\mu \end{cases}$ con $\mu \in R$.

Opción B

1.- Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{-5} & \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{-5} \\ \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$
a) [1 punto] Determina los valores de λ para los que la matriz A – 2I tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.
b) [1,5 puntos] Para λ = –2, resuelve la ecuación matricial AX = 2X + I.

Solución:
a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A-2I_3$ tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.
La matriz $A-2I_3$ tiene inversa si su determinante $|A-2I_3|$ es distinto de cero.
$A-2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante desarrollando por el adjunto de la segunda columna.
$|A-2I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(1-\lambda^2)$
$|A-2I_3| \neq 0$ si $(\lambda-2)(1-\lambda^2) \neq 0$,es decir $(\lambda-2) \neq 0$ y también$(1-\lambda^2) \neq 0$, es decir $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \pm 1$.

La matriz $A-2I_3$ tiene inversa si λ ≠ 2, λ ≠ -1 y λ ≠ 1.

b) Para resolver la ecuación matricial despejamos en la expresión:
$AX = 2X + I \Rightarrow AX-2X = I$, por lo tanto $(A-2I_3).X = I$
Como en el apartado anterior hemos concluido que para λ = -2, la matriz $(A-2I_3)$ tiene inversa, podemos multiplicar por la inversa a la izquierda:
$(A-2I_3)^{-1}.(A-2I_3).X = (A-2I_3)^{-1}.I \Rightarrow X = (A-2I_3)^{-1}$

Ya sólo falta calcular la inversa de la matriz aplicando la fórmula:
$(A-2I_3)^{-1} = \frac{1}{|A-2I_3|}\mathrm{Adj}(A-2I_3)$

Sustituyendo λ = -2 en $|A-2I_3|$obtenemos que:
$|A-2I_3| = (\lambda-2)(1-\lambda^2) = (-2-2)(1-(-2)^2) = 12$
luego tiene inversa.

Calculamos la matriz:

$$(A-2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la traspuesta:

$$(A-2I_3)^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz de adjuntos de su traspuesta:

$$Adj[(A-2I_3)^t] = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La matriz pedida es:

$$(A-2I_3)^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

2.- Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.
a) [1,25 puntos] ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.
b) [1,25 puntos] Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

Solución:
Sean:
x el precio del libro
y el precio de la calculadora
z del precio del estuche

a) El que haya gastado 57€ por la compra de un libro, una calculadora y un estuche da lugar a
$x + y + z = 57$
De que que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.
$x = 2(y + z)$

Por lo tanto tenemos un sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas:

$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ x = 2(y + z) \end{cases}$$

a) Despejando en la 2 ecuación tenemos que $\frac{x}{2} = y + z$ y sustituyendo en la 1ª ecuación resulta que:
$x + \frac{x}{2} = 57 \Rightarrow \frac{3x}{2} = 57 \Rightarrow x = 38€.$
Es decir que sabemos el precio del libro pero no el de la calculadora o el estuche.

b) la nueva condición se traduce como la ecuación:
$0,5x + 0,8y + 0,75z = 34$ €

Y tenemos el nuevo sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ x = 2(y + z) \\ 0,5x + 0,8y + 0,75z = 34 \end{cases}$$

Sustituimos $x = 2(y + z)$, en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2(y + z) + y + z = 57 \\ (y + z) + 0,8y + 0,75z = 34 \end{cases}$$

Obteniendo:

$$\begin{cases} 3y + 3z = 57 \\ 1,8y + 1,75z = 34 \end{cases}$$

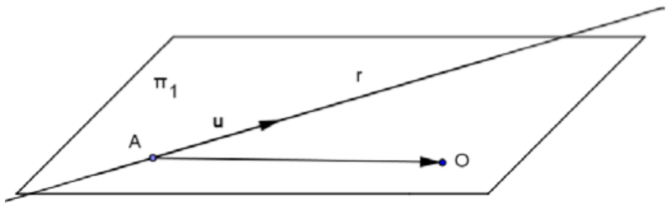
Restando a la 1ª ecuación multiplicada por 0,6 la 2ª, queda:
0,05 = 0 0,2 $\Rightarrow$ z = 4€

Sustituyendo en la 1ª ecuación:
3y = 57-12 = 45 $\Rightarrow$ y = 15 € .

Por lo tanto **un libro vale 38 €, una calculadora 15 € y un estuche 4 €.**

3.- Dada la recta r definida por $\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{3}} = \frac{\boldsymbol{y+1}}{\mathbf{2}}$ **= -z+3 y la recta s definida por** $\begin{cases} \mathbf{x = 1} \\ \mathbf{2y - z = 2} \end{cases}$
a) [1,25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.
b) [1,25 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.

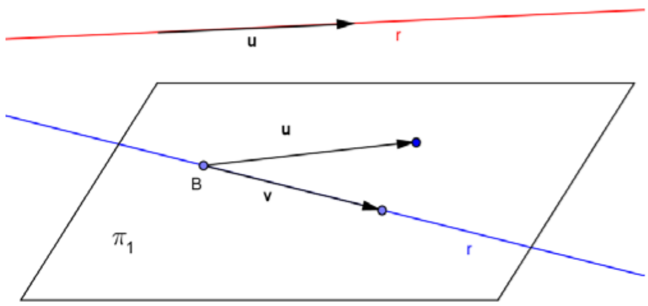
Solución:
Para determinar la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi_1}$ necesitamos un punto, tomaremos el origen O = (0, 0, 0) y dos vectores independientes. Uno será el vector director de la recta r, $\vec{u}$ = (3, 2, -1) y el otro será $\overrightarrow{OA}$ = (1, -1, 3) que une el origen O y el punto A.



Su ecuación general la calculamos mediante el determinante:
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} z = 0 \Rightarrow 5x-10y-5z = 0$$

Queda la ecuación 5(x-2y-z) = 0 que simplificando da lugar a:
π_1: x-2y-z = 0

b) Para determinar la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi_2}$ necesitamos un punto B que pertenecerá a la recta r y dos vectores independientes, $\vec{v}$, vector director de la recta s, y $\vec{u}$ = (3, 2, -1) que es el vector director de la recta r ya que la recta es paralela al plano.



El vector director de la recta s es $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{j} + 2\vec{k}$ = (0, 1, 2).
El punto que tomamos es B(1,-1,0) ya que x = 1 y tomamos z = 0: 2y = -2 $\Rightarrow$ y = -1.

Su ecuación general la calculamos mediante el determinante:
$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y+1 & 2 & 1 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} (x-1) - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} (y+1) + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} z = 0 \Rightarrow 5(x-1)-6(y+1)+3z = 0$$

Queda la ecuación:
π_2: 5x-6y+3z-11 = 0

4.- Sea el punto P(2,3, -1) y la recta r dada por las ecuaciones $\begin{cases} \mathbf{x = 1} \\ \mathbf{y = -2\lambda} \\ \mathbf{z = \lambda} \end{cases}$

a) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P .

b) [1,5 puntos] Calcula la distancia del punto P a la recta r y determina el punto simétrico de P respecto de r.

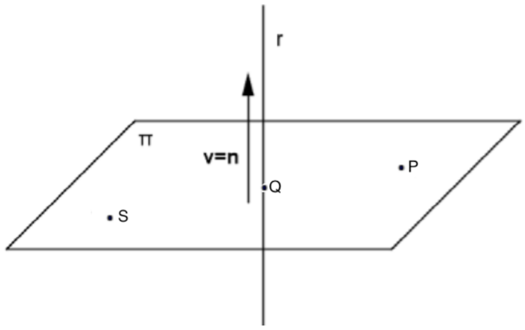
Solución:

El plano π tiene como vector normal $\vec{n}$ el vector director de la recta $\vec{v}$, luego $\vec{n}$ = (0,-2,1). Como, según el enunciado, el plano pasa por el punto P(2,3, -1), el plano π tiene como ecuación normal:

$\vec{n}.\overrightarrow{PX} = 0 \Rightarrow$ (0,-2,1).(x-2,y-3,z+1) = -2y+6+z+1

La ecuación del plano π es:

π: **-2y+z+7 = 0**



b) Para calcular la distancia del punto P a la recta r hallamos el punto Q intersección de la recta r y el plano π y a continuación la distancia entre ambos puntos. Tomamos el punto genérico de la recta (1, 2λ, λ) y obligamos que pertenezca al plano π hallado en el apartado anterior:

$-2(-2\lambda)+(\lambda)+7 = 0 \Rightarrow 5\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{7}{5}$

Sustituyendo valores en la ecuación de la recta hallamos el punto intersección de la recta y el plano.

$Q = \left(1, -2\left(-\frac{7}{5}\right), -\frac{7}{5}\right) = \left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

El vector determinado por los puntos P y q será:

$\overrightarrow{PQ} = \left(1-2, \frac{14}{5}-3, -\frac{7}{5}+1\right) = \left(-1, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

Y la distancia del punto P a la recta r será el módulo de dicho vector:

$d(P, r) = d(P, Q) = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$

Tal como se ve en la figura anterior Q es el punto medio del segmento PS, siendo S = (x, y, z) el punto simétrico buscado:

$\left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5}\right) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z-1}{2}\right)$

Igualando coordenadas, obtenemos:

$1 = \frac{x+2}{2} \Rightarrow x+2 = 2 \Rightarrow x = 0$

$\frac{14}{5} = \frac{y+3}{2} \Rightarrow y = \frac{28}{5} - 3 = \frac{13}{5}$

$-\frac{7}{5} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow z = -\frac{14}{5} + 1 = -\frac{9}{5}$

Luego el punto simétrico S buscado es:

$S = \left(0, \frac{13}{5}, -\frac{9}{5}\right)$