Resuelve

Página 327

Obtención de la primitiva de algunas funciones

■ **NÚMEROS Y POTENCIAS SENCILLAS**

a) $\int 1\, dx = x$ **b)** $\int 2\, dx = 2x$ **c)** $\int \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}x$

d) $\int 2x\, dx = x^2$ **e)** $\int x\, dx = \frac{x^2}{2}$ **f)** $\int 3x\, dx = \frac{3x^2}{2}$

g) $\int 7x\, dx = \frac{7x^2}{2}$ **h)** $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$ **i)** $\int \frac{1}{2}x^2\, dx = \frac{x^3}{6}$

■ **POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO**

a) $\int (-1)x^{-2}\, dx = x^{-1} = \frac{1}{x}$ **b)** $\int x^{-2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x}$

c) $\int \frac{5}{x^2}\, dx = \frac{-5}{x}$ **d)** $\int \frac{1}{x^3}\, dx = \int x^{-3}\, dx = \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x^2}$

e) $\int \frac{2}{x^3}\, dx = 2\int \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{-2}{2x^2} = \frac{-1}{x^2}$ **f)** $\int \frac{5}{(x-3)^3}\, dx = \frac{-5}{2(x-3)^2}$

■ **LAS RAÍCES TAMBIÉN SON POTENCIAS**

a) $\int \frac{3}{2}x^{1/2}\, dx = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$

b) $\int \frac{3}{2}\sqrt{x}\, dx = \int \frac{3}{2}x^{1/2}\, dx = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$

c) $\int 7\sqrt{x}\, dx = 7\int \sqrt{x}\, dx = \frac{14}{3}\sqrt{x^3}$

d) $\int \frac{1}{2}x^{-1/2}\, dx = x^{1/2} = x$

e) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x}$

f) $\int 5\sqrt{x^3}\, dx = 5\int x^{3/2}\, dx = 5\frac{x^{5/2}}{5/2} = 2\sqrt{x^5}$

■ **¿RECUERDAS QUE $D(\ln x) = \frac{1}{x}$?**

a) $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|$ **b)** $\int \frac{1}{5x}\, dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x}\, dx = \frac{1}{5}\ln|5x|$

c) $\int \frac{1}{x+5}\, dx = \ln|x+5|$ **d)** $\int \frac{3}{2x+6}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x+6}\, dx = \frac{3}{2}\ln|2x+6|$

ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

a) $\int \boldsymbol{cos\ x\ dx} = sen\ x$

b) $\int \boldsymbol{2cos\ x\ dx} = 2sen\ x$

c) $\int \boldsymbol{cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx} = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $\int \boldsymbol{cos\ 2x\ dx} = \frac{1}{2}\int 2cos\ 2x\ dx = \frac{1}{2}\ sen\ 2x$

e) $\int \boldsymbol{(-sen\ x)\ dx} = cos\ x$

f) $\int \boldsymbol{sen\ x\ dx} = -cos\ x$

g) $\int \boldsymbol{sen\ (x - \pi)\ dx} = -cos\ (x - \pi)$

h) $\int \boldsymbol{sen\ 2x\ dx} = \frac{1}{2}\int 2sen\ 2x\ dx = \frac{-1}{2}\ cos\ 2x$

i) $\int \boldsymbol{(1 + tg^2\ 2x)\ dx} = \frac{1}{2}\int 2\,(1 + tg^2\ 2x)\ dx = \frac{1}{2}\ tg\ 2x$

j) $\int \boldsymbol{tg^2\ 2x\ dx} = \int (1 + tg^2\ 2x - 1)\ dx = \int (1 + tg^2\ 2x)\ dx - \int 1\ dx = \frac{1}{2}\ tg\ 2x - x$

ALGUNAS EXPONENCIALES

a) $\int \boldsymbol{e^{x-1}\ dx} = e^{x-1}$

b) $\int \boldsymbol{e^{2x+1}\ dx} = \frac{1}{2}\ e^{2x+1}$

1 Primitivas. Reglas básicas para su cálculo

Página 329

1 **Halla:**

a) $\int x^4\, dx$

b) $\int (5x^3 - 8x^2 + 2x - 3)\, dx$

c) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

f) $\int \frac{3}{x^2}$

g) $\int \frac{5}{6x^4}\, dx$

h) $\int \frac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{3x}}\, dx$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}\, dx$

j) $\int (\sqrt{5}x - 3)^4\, dx$

k) $\int \sqrt[3]{(7x-6)^2}\, dx$

l) $\int \frac{5x^3 + 6x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3}}{x}\, dx$

m) $\int \frac{2x^4 - 6x^3 + 5x}{x+2}\, dx$

n) $\int \frac{5dx}{6-4x}$

ñ) $\int \frac{2x^4 + 6x - 3}{x-2}\, dx$

o) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2}\, dx$

a) $\int x^4\, dx = \frac{x^5}{5} + k$

b) $\int (5x^3 - 8x^2 + 2x - 3)\, dx = 5\int x^3 dx - 8\int x^2\, dx + 2\int x\, dx - 3\int dx = \frac{5x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + x^2 - 3x + k$

c) $\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{1/3}\, dx = \frac{x^{(1/3)+1}}{\frac{1}{3}+1} + k = \frac{3}{4}x^{4/3} = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + k$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-1/2}\, dx = \frac{x^{-(1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1} + k = 2x^{1/2} + k = 2\sqrt{x} + k$

e) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\, dx = \int x^{-2/5}\, dx = \frac{x^{-(2/5)+1}}{-\frac{2}{5}+1} + k = \frac{5}{3}x^{3/5} + k = \frac{5\sqrt[5]{x^3}}{3} + k$

f) $\int \frac{3}{x^2}\, dx = 3\int x^{-2}\, dx = 3\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + k = -\frac{3}{x} + k$

g) $\int \frac{5}{6x^4}\, dx = \frac{5}{6}\int x^{-4}\, dx = \frac{5}{6} \cdot \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + k = -\frac{5}{18x^3} + k$

h) $\int \frac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{3x}}\, dx = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\int \frac{x^{1/3}}{x^{1/2}}\, dx = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\int x^{-1/6}\, dx = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x^{-(1/6)+1}}{-\frac{1}{6}+1} + k = \frac{6\sqrt[3]{2}}{5\sqrt{3}}\sqrt[6]{x^5} + k$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}\, dx = \int \frac{x^{1/3}}{3x}\, dx + \int \frac{\sqrt{5}x^{3/2}}{3x}\, dx = \frac{1}{3}\int x^{-2/3}\, dx + \frac{\sqrt{5}}{3}\int x^{1/2}\, dx =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt{5x^3}}{9} + k$

j) $\int (\sqrt{5}x-3)^4\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{5}\,x-3)^{4+1}}{4+1} + k = \frac{(\sqrt{5}\,x-3)^5}{5\sqrt{5}} + k$

k) $\int \sqrt[3]{(7x-6)^2}\,dx = \int (7x-6)^{2/3}\,dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{(7x-6)^{(2/3)+1}}{\frac{2}{3}+1} + k = \frac{3}{35}(7x-6)^{5/3} + k = \frac{3(7x-6)\sqrt[3]{(7x-6)^2}}{35} + k$

l) $\int \frac{5x^3+6x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{3}}{x}\,dx = \int \left(5x^2+6x-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) dx = \frac{5x^3}{3} + 3x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3}\,ln|x| + k$

m) $\int \frac{2x^4-6x^3+5x}{x+2}\,dx = \int \left(2x^3-10x^2+20x-35+\frac{70}{x+2}\right) dx = \frac{x^4}{2} - \frac{10x^3}{3} + 10x^2 - 35x + 70\,ln|x+2| + k$

n) $\int \frac{5}{6-4x}\,dx = -\frac{5}{4}\,ln|6-4x| + k$

ñ) $\int \frac{2x^4+6x-3}{x-2}\,dx = \int \left(2x^3+4x^2+8x+22+\frac{41}{x-2}\right) dx = \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{3} + 4x^2 + 22x + 41\,ln|x-2| + k$

o) $\int \frac{7x^4-5x^2+3x-4}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{7x^4}{x^2}\right) dx - \int \left(\frac{5x^2}{x^2}\right) dx + \int \left(\frac{3x}{x^2}\right) dx - \int \left(\frac{4}{x^2}\right) dx =$

$= \int 7x^2\,dx - \int 5\,dx + \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{4}{x^2}\,dx = \frac{7x^3}{3} - 5x + 3\,ln|x| + \frac{4}{x} + k$

Página 330

2 a) $\int (3x-5\,tg\,x)\,dx$ b) $\int (5\cos x + 3^x)\,dx$ c) $\int (3\,tg\,x - 5\cos x)\,dx$ d) $\int (10^x-5^x)\,dx$

a) $\int (3x-5\,tg\,x)\,dx = 3\int x\,dx - 5\int tg\,x\,dx = \frac{3x^2}{2} - 5(-ln|cos\,x|) + k = \frac{3x^2}{2} + 5\,ln|cos\,x| + k$

b) $\int (5\cos x + 3^x)\,dx = 5\int cos\,x\,dx + \int 3^x\,dx = 5sen\,x + \frac{3^x}{ln\,3} + k$

c) $\int (3\,tg\,x - 5\cos x)\,dx = 3\int tg\,x\,dx - 5\int cos\,x\,dx = 3(-ln|cos\,x|) - 5sen\,x + k = -3ln\,|cos\,x| - 5sen\,x + k$

d) $\int (10^x-5^x)\,dx = \frac{10^x}{ln\,10} - \frac{5^x}{ln\,5} + k$

3 a) $\int \frac{3}{x^2+1}\,dx$ b) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ c) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$ d) $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}\,dx$

a) $\int \frac{3}{x^2+1}\,dx = 3\,arctg\,x + k$

b) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = ln\,|x^2+1| + k$

c) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1+\frac{-2}{x^2+1}\right) dx = x - 2arctg\,x + k$

d) $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right) dx = x + ln|x^2+1| + k$

Página 331

4 a) $\int sen^2\, x\, dx$ b) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$ c) $\int \frac{dx}{1+8x^2}$

d) $\int \frac{dx}{25+9x^2}$ e) $\int \frac{dx}{3+2x^2}$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-8x^2}}$ h) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$ i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$

j) $\int e^{5x-2}\, dx$

a) Restando las ecuaciones del ejercicio resuelto 2.a) de esta página, obtenemos que $1 - cos\, 2x = 2sen^2\, x$.

$$\int sen^2\, x\, dx = \int \frac{1 - cos\, 2x}{2}\, dx = \int \frac{1}{2}\, dx - \frac{1}{2}\int cos\, 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{sen\, 2x}{2} + k = \frac{x}{2} - \frac{sen\, 2x}{4} + k$$

b) $\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\, arc\, tg\, 3x + k$

c) $\int \frac{dx}{1+8x^2} = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{8}\, x)^2} = \frac{1}{\sqrt{8}}\, arc\, tg\, \sqrt{8}x + k$

d) $\int \frac{dx}{25+9x^2} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{1+\frac{9}{25}x^2} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{3}{5}x\right)^2} = \frac{1}{25}\cdot \frac{1}{\frac{3}{5}} arc\, tg\, \frac{3x}{5} + k = \frac{1}{15} arc\, tg\, \frac{3x}{5} + k$

e) $\int \frac{dx}{3+2x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\frac{2}{3}x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\, arc\, tg\, \sqrt{\frac{2}{3}}\, x + k = \frac{\sqrt{6}}{6} arc\, tg\, \sqrt{\frac{2}{3}}\, x + k$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\, arc\, sen\, 3x + k$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-8x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\sqrt{8}\, x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\, arc\, sen\, \sqrt{8}\, x + k$

h) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{9}{25}\, x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\, x\right)^2}} = \frac{1}{5}\cdot \frac{1}{\frac{3}{5}}\, arc\, sen\, \frac{3x}{5} + k = \frac{1}{3}\, arc\, sen\, \frac{3x}{5} + k$

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\, x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\, x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\, arc\, sen\, \sqrt{\frac{2}{3}}\, x + k = \frac{1}{\sqrt{2}}\, arc\, sen\, \sqrt{\frac{2}{3}}\, x + k$

j) $\int e^{5x-2}\, dx = \frac{1}{5}\, e^{5x-2} + k$

2 Expresión compuesta de integrales inmediatas

Página 333

1 **a)** $\int cos^5 x\,(-sen\,x)\,dx$ **b)** $\int \sqrt[3]{cos^2 x}\,(-sen\,x)\,dx$ **c)** $\int e^{cos\,x}\,sen\,x\,dx$

d) $\int e^{x^3+x^2}(3x^2+2x)\,dx$ **e)** $\int tg\,x^2\cdot 2x\,dx$ **f)** $\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,dx$

g) $\int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx$ **h)** $\int ln\,(x^2+1)\,2x\,dx$ **i)** $\int \sqrt[3]{(x^4+5x)^2}\,(4x^3+5)\,dx$

a) $\int cos^5 x\,(-sen\,x)\,dx = \int (cos\,x)^5\,(-sen\,x)\,dx = \frac{cos^6 x}{6} + k$, ya que $D[cos\,x] = -sen\,x$.

b) $\int \sqrt[3]{cos^2 x}\,(-sen\,x)\,dx = \int (cos\,x)^{2/3}\,(-sen\,x)\,dx = \frac{(cos\,x)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + k = \frac{3}{5}\sqrt[3]{cos^5 x}$, porque $D[cos\,x] = -sen\,x$.

c) $\int e^{cos\,x}\,sen\,x\,dx = -\int e^{cos\,x}\,(-sen\,x)\,dx = -e^{cos\,x} + k$, puesto que $D[cos\,x] = -sen\,x$.

d) $\int e^{x^3+x^2}(3x^2+2x)\,dx = e^{x^3+x^2} + k$, ya que $D[x^3+x^2] = 3x^2+2x$.

e) $\int tg\,x^2\cdot 2x\,dx = \int \frac{sen\,x^2}{cos\,x^2}\cdot 2x\,dx = -\int \frac{-sen\,x^2\cdot 2x}{cos\,x^2}\,dx = -ln\,|cos\,x^2| + k$, porque $D[cos^2 x] = -sen\,x^2\cdot 2x$.

f) $\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,dx = \int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}\,dx = arc\,tg\,x^3 + k$, puesto que $D[x^3] = 3x^2$.

g) $\int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx = \int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}\,dx = arc\,sen\,e^{-x}$, ya que $D[e^{-x}] = -e^{-x}$.

h) $\int ln\,(x^2+1)\,2x\,dx = (x^2+1)\,ln\,(x^2+1) - (x^2+1) + k$, porque $D[x^2+1] = 2x$.

i) $\int \sqrt[3]{(x^4+5x)^2}\,(4x^3+5)\,dx = \int (x^4+5x)^{2/3}\,(4x^3+5)\,dx = \frac{(x^4+5x)^{(2/3)+1}}{\frac{2}{3}+1} + k = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x^4+5x)^5} + k$,

ya que $D[x^4+5x] = 4x^3+5$.

Página 334

2 **a)** $\int \sqrt{x^3-3x^2+5}\cdot(x^2-2x)\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2\sqrt{x}}}}\,\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **c)** $\int \frac{cos^3 x\,dx}{sen^4 x}$

d) $\int (x^2+1)\,ln\,(x^3+3x)\,dx$ **e)** $\int \frac{sen\,x\,cos\,x}{1+sen^4 x}\,dx$ **f)** $\int e^{x+\sqrt{x}}\left(\frac{6x+3\sqrt{x}}{x}\right)dx$

a) Llamamos $u = x^3-3x^2+5 \rightarrow du = 3(x^2-2x)\,dx \rightarrow \frac{du}{3} = (x^2-2x)\,dx$

$$\int \sqrt{x^3-3x^2+5}\,(x^2-2x)\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du = \frac{2}{6}u^{3/2} + k = \frac{2}{9}(x^3-3x^2+5)^{3/2} + k =$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{(x^3-3x^2+5)^3} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2\sqrt{x}}}}\,\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(e^{\sqrt{x}})^2}}\,\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = I$

Hacemos $u = e^{\sqrt{x}} \to du = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx \to 2\,du = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,2\,du = 2arc\ sen\ u + k = 2arc\ sen\ e^{\sqrt{x}} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{cos^3 x\,dx}{sen^4 x} = \int \frac{cos^2 x \cdot cos\ x}{sen^4 x}\,dx = \int \frac{(1-sen^2 x)\cdot cos\ x}{sen^4 x}\,dx = I$

Llamamos $u = sen\ x \to du = cos\ x\,dx$

$I = \displaystyle\int \frac{1-u^2}{u^4}\,du = \int \frac{du}{u^4} - \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-4}\,du - \int u^{-2}\,du = -\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u} + k = -\frac{1}{3sen^3 x} + \frac{1}{sen\ x} + k$

d) $\displaystyle\int (x^2+1)\,ln\,(x^3+3x)\,dx = I$

Si $u = x^3 + 3x \to du = (3x^2+3)\,dx \to \dfrac{du}{3} = (x^2+1)\,dx$

$I = \displaystyle\int ln\ u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\,u \cdot ln\ u - \frac{1}{3}\,u + k = \frac{1}{3}(x^3+3x)\,ln\,(x^3+3x) - \frac{1}{3}(x^3+3x) + k$

e) $\displaystyle\int \frac{sen\ x \cdot cos\ x}{1+sen^4 x}\,dx = \int \frac{sen\ x \cdot cos\ x}{1+(sen^2 x)^2}\,dx = I$

Llamamos $u = sen^2 x \to du = 2sen\ x \cdot cos\ x\,dx \to \dfrac{du}{2} = sen\ x \cdot cos\ x\,dx$

$I = \displaystyle\int \frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\,arc\ tg\ u + k = \frac{1}{2}\,arc\ tg\,(sen^2 x) + k$

f) $\displaystyle\int e^{x+\sqrt{x}}\left(\frac{6x+3\sqrt{x}}{x}\right)dx = \int e^{x+\sqrt{x}}\left(6+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx = I$

Como $D[x+\sqrt{x}] = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, hacemos $u = x + \sqrt{x} \to du = \left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx \to 6\,du = \left(6+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$

$I = \displaystyle\int e^u\,6\,du = 6e^u + k = 6e^{x+\sqrt{x}} + k$

Página 335

3 $\displaystyle\int \sqrt{x-4}\,(x+5)\,dx$

Para eliminar la raíz hacemos $x - 4 = t^2 \to dx = 2t\,dt \quad (x = t^2 + 4)$

$$\int \sqrt{x-4}\,(x+5)\,dx = \int \sqrt{t^2}\,(t^2+4+5)\,2t\,dt = 2\int t^2\,(t^2+9)\,dt = 2\int (t^4+9t^2)\,dt =$$

$$= \frac{2t^5}{5} + 6t^3 + k = \frac{2\sqrt{(x-4)^5}}{5} + 6\sqrt{(x-4)^3} + k$$

4 $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+x-1}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx$

Para eliminar las raíces hacemos $x-1=t^6 \to dx=6t^5\,dt \quad (x=1+t^6)$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+x-1}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx = \int \frac{\sqrt[3]{t^6}+t^6}{\sqrt{(t^6)^3}}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^2+t^6}{t^9}\,t^5\,dt = 6\int\left(\frac{1}{t^2}+t^2\right)dt =$$

$$= 6\int (t^{-2}+t^2)\,dt = -\frac{6}{t}+2t^3+k = -\frac{6}{\sqrt[6]{x-1}}+2\sqrt[6]{(x-1)^3}+k$$

5 $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

Hacemos el cambio $x=2sen\,\alpha \to dx=2cos\,\alpha\,d\alpha$

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx = \int\sqrt{4-(2sen\,\alpha)^2}\,2cos\,\alpha\,d\alpha = \int\sqrt{4-4sen^2\,\alpha}\,2cos\,\alpha\,d\alpha =$$

$$= \int 2\sqrt{1-sen^2\,\alpha}\,2cos\,\alpha\,d\alpha = 4\int cos^2\,\alpha\,d\alpha = 4\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{sen\,2\alpha}{4}\right)+k =$$

$$= 2arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right)+sen\left[2arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right)\right]+k$$

3 Integración "por partes"

Página 336

1 Calcula:

$$\int x \text{ sen } x \, dx$$

Llamamos $I = \int x \cdot \text{sen } x \, dx$

$$\left.\begin{array}{l} u = x, \ du = dx \\ dv = \text{sen } x \, dx, \ v = -\cos x \end{array}\right\} I = -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \text{sen } x + k$$

2 Calcula:

$$\int x \text{ arc tg } x \, dx$$

Llamamos $I = \int x \cdot \text{arc tg } x \, dx$

$$\left.\begin{array}{l} u = \text{arc tg } x, \ du = \dfrac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x \, dx, \ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{x^2}{2} \text{arc tg } x - \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \text{arc tg } x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \text{arc tg } x - \frac{1}{2}[x - \text{arc tg } x] + k = \frac{x^2}{2} \text{arc tg } x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{arc tg } x + k =$$

$$= \frac{x^2+1}{2} \text{arc tg } x - \frac{1}{2}x + k$$

Página 337

3 Calcula:

$$\int x^4 e^x \, dx$$

Resolvámosa integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^4 \ \to \ du = 4x^3 \, dx \\ dv = e^x \, dx \ \to \ v = e^x \end{array}\right\}$$

$$I = x^4 \cdot e^x - \int e^x \cdot 4x^3 \, dx = x^4 \cdot e^x - 4\int x^3 \cdot e^x \, dx$$

$$I_1 = \int x^3 \cdot e^x \, dx = x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6e^x$$

(Visto en el ejercicio resuelto 2 de la página 337)

$$I = x^4 \cdot e^x - 4[x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6e^x] + k = x^4 \cdot e^x - 4x^3 \cdot e^x + 12x^2 \cdot e^x - 24x \cdot e^x + 24e^x + k$$

4 Calcula:

$$\int sen^2\, x\, dx$$

Resolvámosla integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = sen\, x \;\rightarrow\; du = cos\, x\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \;\rightarrow\; v = -cos\, x \end{array}\right\}$$

$$I = -sen\, x \cdot cos\, x - \int (-cos\, x)\, cos\, x\, dx = -sen\, x \cdot cos\, x + \int cos^2\, x\, dx =$$

$$= -sen\, x \cdot cos\, x + \int (1 - sen^2\, x)\, dx = -sen\, x \cdot cos\, x + \int dx - \int sen^2\, x\, dx =$$

$$= -sen\, x \cdot cos\, x + x - \int sen^2\, x\, dx$$

Es decir:

$$I = -sen\, x \cdot cos\, x + x - I \;\rightarrow\; 2I = -sen\, x \cdot cos\, x + x \;\rightarrow\; I = \frac{x - sen\, x \cdot cos\, x}{2} + k$$

4 Integración de funciones racionales

Página 338

1 Calcula:

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 4}\, dx$$

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 4}\, dx = \int \left(3x + 7 + \frac{29}{x - 4}\right) dx = \frac{3x^2}{2} + 7x + 29\, ln\,|x - 4| + k$$

2 Calcula:

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1}\, dx$$

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1}\, dx = \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{13}{4} + \frac{17/4}{2x + 1}\right) dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{13}{4}x - \frac{17}{8}\, ln\,|2x + 1| + k =$$

$$= \frac{3x^2}{4} - \frac{13}{4}x - \frac{17}{8}\, ln\,|2x + 1| + k$$

Página 341

3 Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{5x - 3}{x^3 - x}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x + 6}{(x - 1)^3}\, dx$

a) Descomponemos la fracción:

$$\frac{5x - 3}{x^3 - x} = \frac{5x - 3}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}$$

$$\frac{5x - 3}{x^3 - x} = \frac{A(x - 1)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)}{x(x - 1)(x + 1)}$$

$$5x - 3 = A(x - 1)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)$$

Hallamos A, B y C dando a x los valores 0, 1 y –1:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = 0 & \to & -3 = -A & \to & A = 3 \\ x = 1 & \to & 2 = 2B & \to & B = 1 \\ x = -1 & \to & -8 = 2C & \to & C = -4 \end{array}\right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{5x - 3}{x^3 - x}\, dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x - 1} - \frac{4}{x + 1}\right) dx = 3\, ln\,|x| + ln\,|x - 1| - 4\, ln\,|x - 1| + k$$

b) Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^2 - 2x + 6}{(x - 1)^3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3} = \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 1) + C}{(x - 1)^3}$$

$$x^2 - 2x + 6 = A(x - 1)^2 + B(x - 1) + C$$

Dando a x los valores 1, 0 y 2, queda:

$$\left.\begin{array}{lll} x = 1 & \to & 5 = C \\ x = 0 & \to & 6 = A - B + C \\ x = 2 & \to & 6 = A + B + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to A = 1 \\ \to B = 0 \\ \to C = 5 \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2 - 2x + 6}{(x - 1)^3}\, dx = \int \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^3}\right) dx = ln\,|x - 1| - \frac{5}{2(x - 1)^2} + k$$

4 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+22x^2-12x+8}{x^4-4x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3-4x^2+4x}{x^4-2x^3-4x^2+8x}\,dx$

a) $x^4-4x^2 = x^2(x^2-4) = x^2(x-2)(x+2)$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^3+22x^2-12x+8}{x^2(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

$$\frac{x^3+22x^2-12x+8}{x^2(x-2)(x+2)} = \frac{Ax(x-2)(x+2)+B(x-2)(x+2)+Cx^2(x+2)+Dx^2(x-2)}{x^2(x-2)(x+2)}$$

$$x^3+22x^2-12x+8 = Ax(x-2)(x+2)+B(x-2)(x+2)+Cx^2(x+2)+Dx^2(x-2)$$

Hallamos A, B, C y D dando a x los valores 0, 2, –2 y 1:

$$\left.\begin{array}{llll} x=0 & \to\ 8=-4B & \to\ B=-2 & \\ x=2 & \to\ 80=16C & \to\ C=5 & \\ x=-2 & \to\ 112=-16D & \to\ D=-7 & \\ x=1 & \to\ 19=-3A-3B+3C-D & \to\ -3A=-9 & \to\ A=3 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3+22x^2-12x+8}{x^4-4x^2}\,dx = \int\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x-2}-\frac{7}{x+2}\right)dx =$$

$$= 3\,ln|x| + \frac{2}{x} + 5\,ln|x-2| - 7\,ln|x+2| + k$$

b) La fracción se puede simplificar:

$$\frac{x^3-4x^2+4x}{x^4-2x^3-4x^2+8x} = \frac{x(x-2)^2}{x(x-2)^2(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

$$\int \frac{x^3-4x^2+4x}{x^4-2x^3-4x^2+8x}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx = ln|x+2| + k$$

Página 342

5 a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+3}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+3}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^2+3}$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{7x^2+11}$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{3}\,arc\ tg\ x + k$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{3x^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(\sqrt{3}\,x)^2+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\ tg\ \sqrt{3}\,x + k = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,arc\ tg\ \sqrt{3}\,x + k$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^2+3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{2x^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(\sqrt{2}\,x)^2+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\ tg\ \sqrt{2}\,x + k = \frac{1}{3\sqrt{2}}\,arc\ tg\ \sqrt{2}\,x + k$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{7x^2+11} = \frac{1}{11}\int \frac{dx}{\frac{7}{11}x^2+1} = \frac{1}{11}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{7}{11}}\,x\right)^2+1} = \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{11}}}\,arc\ tg\sqrt{\frac{7}{11}}\,x + k =$

$\displaystyle = \frac{1}{\sqrt{77}}\,arc\ tg\sqrt{\frac{7}{11}}\,x + k$

6 a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+10}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+8}$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-12x+26}$

a) Como el polinomio x^2-4x+5 no tiene raíces reales,

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+5} = \int \frac{dx}{x^2-4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = arc\ tg\ (x-2)+k$$

b) Al igual que en el apartado anterior, el polinomio $x^2-4x+10$ no tiene raíces reales,

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+10} = \int \frac{dx}{x^2-4x+4+6} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+6} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\ arc\ tg\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)+k = \frac{\sqrt{6}}{6}\ arc\ tg\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)+k$$

c) Como el polinomio x^2+3x+8 no tiene raíces,

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+8} = \int \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+8} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}} = \frac{1}{\frac{23}{4}}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{23}}{2}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{23}{4}}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{23}}\right)^2+1} = \frac{1}{\frac{23}{4}}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{23}}}\ arc\ tg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{23}}\right)+k = \frac{2\sqrt{23}}{23}\ arc\ tg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{23}}\right)+k$$

d) Una vez comprobado que el polinomio $x^2-6x+13$ no tiene raíces,

$$\int \frac{dx}{2x^2-12x+26} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-2\cdot 3x+9+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-3)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\ arc\ tg\left(\frac{x-3}{2}\right)+k = \frac{1}{4}\ arc\ tg\left(\frac{x-3}{2}\right)+k$$

Página 343

7 a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-4x+10}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x-11}{x^2-4x+10}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{7x-11}{x^2-4x+10}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{5x+12}{x^2+3x+10}dx$

a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-4x+10}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-2)}{x^2-4x+10}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+10}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+10)+k$

b) $\displaystyle\int \frac{x-11}{x^2-4x+10}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+\frac{1}{2}\cdot 4-11}{x^2-4x+10}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+10}dx - 9\int \frac{1}{x^2-4x+10}dx = \frac{1}{2}I_1 - 9I_2$

$$I_1 = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+10}dx = \ln(x^2-4x+10)+k$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2-4x+10}dx = \int \frac{1}{x^2-4x+4+6}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+6}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\ arc\ tg\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)+k = \frac{\sqrt{6}}{6}\ arc\ tg\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)+k$$

Por tanto:

$$\int \frac{x-11}{x^2-4x+10}\,dx = \frac{1}{2}\,ln\,(x^2-4x+10) - \frac{3\sqrt{6}}{2}\,arc\,tg\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k$$

c) $$\int \frac{7x-11}{x^2-4x+10}\,dx = \int \frac{\frac{7}{2}(2x-4)+\frac{7}{2}\cdot 4-11}{x^2-4x+10}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+10}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2-4x+10}\,dx =$$

$$= \frac{7}{2}\,ln\,(x^2-4x+10) + \frac{\sqrt{6}}{2}\,arc\,tg\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k$$

(Las dos últimas integrales están resueltas en los apartados anteriores).

d) $$\int \frac{5x+12}{x^2+3x+10}\,dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+3)-\frac{5}{2}\cdot 3+12}{x^2+3x+10}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+10}\,dx + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+10} = \frac{5}{2}I_1 + \frac{9}{2}I_2$$

$$I_1 = \int \frac{2x+3}{x^2+3x+10}\,dx = ln\,(x^2+3x+10) + k$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+10} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{31}{4}} = \frac{1}{\frac{31}{4}}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{31}}{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\frac{31}{4}}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{31}{4}}\,\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{31}}}\,arc\,tg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right) + k = \frac{2}{\sqrt{31}}\,arc\,tg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right) + k$$

Por tanto:

$$\int \frac{5x+12}{x^2+3x+10}\,dx = \frac{5}{2}\,ln\,(x^2+3x+10) + \frac{9}{\sqrt{31}}\,arc\,tg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right) + k$$

Página 344

8 **Calcula** $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{x^3+2x^2+3x}\,dx$.

Comenzamos efectuando la división:

$$\frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{x^3+2x^2+3x} = x + \frac{3x+3}{x^3+2x^2+3x}$$

$$\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{x^3+2x^2+3x}\,dx = \int\left(x + \frac{3x+3}{x^3+2x^2+3x}\right)dx = \int x\,dx + \int \frac{3x+3}{x^3+2x^2+3x}\,dx$$

Descomponemos el cociente en fracciones simples:

$$x^3+2x^2+3x = x(x^2+2x+3)$$

$$\frac{3x+3}{x^3+2x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+3} \to A=1,\ M=-1,\ N=1$$

$$\frac{3x+3}{x^3+2x^2+3x} = \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+2x+3}$$

$$\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{x^3+2x^2+3x}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-x+1}{x^2+2x+3}\,dx = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + k$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x}\, dx = ln\,|x| + k$$

$$I_3 = \int \frac{-x+1}{x^2+2x+3}\, dx = \int \frac{\frac{-1}{2}(2x+2) - \frac{-1}{2} \cdot 2 + 1}{x^2+2x+3}\, dx = \frac{-1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\, dx + 2 \int \frac{1}{x^2+2x+3}\, dx$$

Calculamos esta segunda integral:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\, dx = \int \frac{1}{x^2+2x+1+2}\, dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\, arc\ tg \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k = \frac{\sqrt{2}}{2}\, arc\ tg \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$$

De donde $I_3 = \frac{-1}{2}\, ln\,(x^2+2x+3) + \sqrt{2}\, arc\ tg \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$

Finalmente, obtenemos el resultado:

$$\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{x^3+2x^2+3x}\, dx = \frac{x^2}{2} + ln\,|x| - \frac{1}{2}\, ln\,(x^2+2x+3) + \sqrt{2}\, arc\ tg \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 345

1. Integrales inmediatas de funciones compuestas

Hazlo tú. Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{sen\ 3x + cos\ 3x}{sen\ 3x - cos\ 3x}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1-cos^2 x}{sen\ 2x}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx$

a) Observamos que $D[sen\ 3x - cos\ 3x] = 3(cos\ 3x + sen\ 3x)$. Por tanto:

$$\int \frac{sen\ 3x + cos\ 3x}{sen\ 3x - cos\ 3x}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(cos\ 3x + sen\ 3x)}{sen\ 3x - cos\ 3x}\, dx = \frac{1}{3}\, ln\,|sen\ 3x - cos\ 3x| + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-2}}\, dx = \frac{3}{2}\int (x^2-2)^{-1/2}\, 2x\, dx = \frac{3}{2}\, \frac{(x^2-2)^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1} + k = 3\sqrt{x^2-2} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{1-cos^2 x}{sen\ 2x}\, dx = \int \frac{sen^2 x}{2sen\ x\ cos\ x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{sen\ x}{cos\ x}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-sen\ x}{cos\ x}\, dx = -\frac{1}{2}\, ln\,|cos\ x| + k$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = x - arc\ tg\ x + k$

Página 346

2. Método de sustitución

Hazlo tú. Aplicar el método de sustitución para resolver estas integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-ln\ x}}$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\, dx$

a) Hacemos el cambio $1 - ln\ x = t^2 \ \to\ -\frac{1}{x}\, dx = 2t\, dt \ \to\ \frac{dx}{x} = -2t\, dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-ln\ x}} = \int \frac{-2t\, dt}{\sqrt{t^2}} = \int (-2)\, dt = -2t + k = -2\sqrt{1-ln\ x} + k$$

b) Usando el cambio $x = t^2 \ \to\ dx = 2t\, dt$, obtenemos:

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{t^2}{1+\sqrt{t^2}}\, 2t\, dt = 2\int \frac{t^3}{1+t}\, dt = 2\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - ln\,|t+1|\right) + k = 2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - ln\,|\sqrt{x}+1|\right) + k$$

3. Integración por partes

Hazlo tú.

a) $\displaystyle\int \textbf{arc sen}\,\frac{x}{2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\ln x\,dx$

a) Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = arc\ sen\,\dfrac{x}{2} \;\to\; du = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}\,dx \\ dv = dx \;\to\; v = x \end{cases}$$

$$I = x\cdot arc\ sen\,\frac{x}{2} - \int \frac{x}{2\cdot\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}\,dx = x\cdot arc\ sen\,\frac{x}{2} + \int\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-(1/2)}\left(-\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= x\cdot arc\ sen\,\frac{x}{2} + \frac{\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)^{-(1/2)+1}}{-\dfrac{1}{2}+1} + k = x\cdot arc\ sen\,\frac{x}{2} + 2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + k = x\cdot arc\ sen\,\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2} + k$$

b) Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \ln x \;\to\; du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = \dfrac{1}{x^2}dx \;\to\; v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$I = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{x}\ln x + \int\frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + k$$

Página 347

4. Integración por partes

Hazlo tú. Calcular:

a) $\displaystyle I = \int 2x^2\cos 2x\,dx$ **b)** $\displaystyle I = \int e^{-x}\cos 2x\,dx$

a) Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = 2x^2 \;\to\; du = 4x\,dx \\ dv = \cos 2x\,dx \;\to\; v = \dfrac{sen\,2x}{2} \end{cases}$$

$$I = 2x^2\cdot\frac{sen\,2x}{2} - \int\frac{sen\,2x}{2}\cdot 4x\,dx = x^2\,sen\,2x - 2\int x\cdot sen\,2x\,dx = x^2\cdot sen\,2x - 2I_1$$

$$I_1 = \int x\cdot sen\,2x\,dx$$

Aplicamos de nuevo la integración por partes:

$$\begin{cases} u = x \;\to\; du = dx \\ dv = sen\,2x\,dx \;\to\; v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{cases}$$

$$I_1 = -x\,\frac{\cos 2x}{2} + \int\frac{\cos 2x}{2}\,dx = -x\,\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx = -x\,\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\,sen\,2x + k$$

Finalmente:

$$I = x^2\cdot sen\,2x - 2I_1 = x^2\cdot sen\,2x + x\cdot\cos 2x - \frac{1}{2}\,sen\,2x + k$$

b) $I = \int e^{-x} \cdot cos\ 2x\ dx = -\frac{1}{5} e^{-x}(cos\ 2x - 2sen\ 2x)$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = e^{-x} \ \rightarrow \ du = -e^{-x}\,dx \\ dv = cos\ 2x\ dx \ \rightarrow \ v = \dfrac{sen\ 2x}{2} \end{cases}$$

$$I = e^{-x}\frac{sen\ 2x}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-x}\,sen\ 2x\ dx = e^{-x}\frac{sen\ 2x}{2} + \frac{1}{2}I_1$$

$$I_1 = \int e^{-x}\,sen\ 2x\ dx$$

Integramos de nuevo por partes:

$$\begin{cases} u = e^{-x} \ \rightarrow \ du = -e^{-x}\,dx \\ dv = sen\ 2x\ dx \ \rightarrow \ v = -\dfrac{-cos\ 2x}{2} \end{cases}$$

$$I_1 = -e^{-x}\cdot\frac{cos\ 2x}{2} - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cdot cos\ 2x\ dx$$

Sustituimos I_1 en I y se obtiene:

$$\int e^{-x}\cdot cos\ 2x\ dx = e^{-x}\cdot\frac{sen\ 2x}{2} - e^{-x}\cdot\frac{cos\ 2x}{4} - \frac{1}{4}\int e^{-x}\cdot cos\ 2x\ dx$$

Pasamos el último término al primer miembro y despejamos:

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\cdot cos\ 2x\ dx = e^{-x}\cdot\frac{sen\ 2x}{2} - e^{-x}\cdot\frac{cos\ 2x}{4} \ \rightarrow \ \int e^{-x}\cdot cos\ 2x\ dx = \frac{2}{5}e^{-x}\cdot sen\ 2x - \frac{1}{5}e^{-x}\cdot cos\ 2x + k$$

5. Integración de funciones racionales

Hazlo tú.

a) $\int \frac{x+2}{x^4 - 2x^2 + 1}\,dx$ **b)** $\int \frac{2}{3x^2 + 4}\,dx$

a) $\int \frac{x+2}{x^4-2x^2+1}\,dx = \int \frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} \ \rightarrow \ A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{3}{4},\ C = \frac{1}{2},\ D = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{x+2}{x^4-2x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{4}\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\,ln(x-1) - \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{2}\,ln(x+1) - \frac{1}{4(x+1)} + k$$

b) $\int \frac{2}{3x^2+4}\,dx = \frac{2}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,arc\ tg\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + k = \frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\ tg\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + k$

Página 348

6. Integrales racionales con raíces reales y complejas

Hazlo tú.

Calcula $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-1}\,dx$.

$$\int \frac{x+2}{x^3-1}\,dx = \int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} \to A=1,\ M=-1,\ N=-1$$

$$I = \int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = ln|x-1| - I_1$$

$$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\,I_2$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{\left(\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\,arc\ tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k = \frac{2}{\sqrt{3}}\,arc\ tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

Sustituimos en I_1:

$$I_1 = \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\ tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

Sustituimos en I:

$$I = ln\,|x-1| - \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\ tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

7. Integrales de diversos tipos

Hazlo tú.

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int [cos\,(2x) + sen\ x\ cos\ x]\,dx$

a) Llamamos $u = \sqrt{x} \to du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \to 2u\,du = dx$

$$I = \int \frac{u}{1+u}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{1+u}\,du = 2\int\left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)du =$$

$$= 2\left(\frac{u^2}{2} - u + ln|u+1|\right) + k = 2\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + ln\,(\sqrt{x}+1)\right) + k$$

b) Llamamos $u = e^x \to du = e^x\, dx$

$$I = \int \frac{du}{(u^2-1)(u+1)} = \int \frac{du}{(u-1)(u+1)^2}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{u-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{u+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{(u+1)^2}$$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u-1}\,du - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u+1}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(u+1)^2}\,du = \frac{1}{4}\,ln\,|u-1| - \frac{1}{4}\,ln\,|u+1| + \frac{1}{2}\,\frac{1}{u+1} + k =$$

$$= \frac{1}{4}\,ln\,|e^x-1| - \frac{1}{4}\,ln\,(e^x+1) + \frac{1}{2(e^x+1)} + k$$

c) $\displaystyle\int (cos\;2x + sen\;x \cdot cos\;x)\,dx = \int cos\;2x\,dx + \int sen\;x \cdot cos\;x\,dx = \frac{sen\;2x}{2} + \frac{sen^2\,x}{2} + k$

En la segunda integral se ha tenido en cuenta que $D\,[sen\;x] = cos\;x$.

8. Primitiva que cumple una condición

Hazlo tú. Halla $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ y $f''(x) = 3x$.

$$f'(x) = \int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2} + k_1$$

$$f'(0) = 2 \to k_1 = 2$$

$$f(x) = \int \left(\frac{3x^2}{2} + 2\right) dx = \frac{x^3}{2} + 2x + k_2$$

$$f(0) = 1 \to k_2 = 1$$

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + 1$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 349

1. Curva de la que se conocen las pendientes de las rectas tangentes

Hallar la curva en la que las pendientes de las rectas tangentes en cualquier punto vienen dadas por la función $f(x) = xe^{2x}$. Se sabe también que la curva pasa por el punto $A(0, 2)$.

Si llamamos $F(x)$ a la función buscada, esta cumple dos condiciones:

$F'(x) = x \cdot e^{2x}$

$F(0) = 2$ para que pase por el punto A.

Por tanto,

$$F(x) = \int x \cdot e^{2x}\, dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x \ \rightarrow \ du = dx \\ dv = e^{2x}\, dx \ \rightarrow \ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$F(x) = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\, dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + k$$

$$F(0) = 2 \ \rightarrow \ -\frac{1}{4} + k = 2 \ \rightarrow \ k = \frac{9}{4}$$

Así, $F(x) = \dfrac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \dfrac{1}{4} e^{2x} + \dfrac{9}{4}$.

2. Función derivable

Hallar una función $f(x)$ derivable en $\mathbb{R}$, que pase por el punto $P(-1, 3)$ y cuya derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calculamos las primitivas de los dos tramos:

$$f_1(x) = \int (2x - 1)\, dx = x^2 - x + k_1 \qquad f_2(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = ln\, x + k_2, \text{ ya que } x > 1.$$

Como pasa por el punto P:

$$f_1(-1) = 3 \ \rightarrow \ 2 + k_1 = 3 \ \rightarrow \ k_1 = 1$$

Así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ ln\, x + k_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$, debe ser continua en $\mathbb{R}$ y, en particular, en $x = 1$.

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} (x^2 - x + 1) = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} (ln\, x + k_2) = k_2 \end{cases} \ \rightarrow \ k_2 = 1$$

Con el valor de k_2 obtenido se cumplen todas las condiciones y la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ ln\, x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Integración de un valor absoluto

Dada la función $f(x) = \frac{x}{2} - 2$, calcular $\int |f(x)|\, dx$.

Definimos la función por intervalos:

$$\frac{x}{2} - 2 = 0 \ \to \ x = 4$$

$$|f(x)| = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 2 & \text{si } x < 4 \\ \frac{x}{2} - 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

Integramos cada tramo:

$$\int \left(-\frac{x}{2} + 2\right) dx = -\frac{x^2}{4} + 2x + k_1$$

$$\int \left(\frac{x}{2} - 2\right) dx = \frac{x^2}{4} - 2x + k_2$$

$$F(x) = \int |f(x)|\, dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + 2x + k_1 & \text{si } x < 4 \\ \frac{x^2}{4} - 2x + k_2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

Como la función debe ser continua en $x = 4$:

$$F(4) = \frac{4^2}{4} - 2 \cdot 4 + k_2 = -4 + k_2$$

$$\lim_{x \to 4} F(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} \left(-\frac{x^2}{4} + 2x + k_1\right) = 4 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \left(\frac{x^2}{4} - 2x + k_2\right) = -4 + k_2 \end{cases} \to \ 4 + k_1 = -4 + k_2 \ \to \ k_2 = 8 + k_1$$

Es decir:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + 2x + k & \text{si } x < 4 \\ \frac{x^2}{4} - 2x + 8 + k & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

4. Gráficas de primitivas

Hallar una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x - 4$ tal que su gráfica corte al eje X en un único punto.

$F(x) = \int (2x - 4)\, dx = x^2 - 4x + k$

Para que $F(x)$ corte al eje X en un único punto, la expresión de $F(x)$ debe ser un cuadrado perfecto. Por tanto:

$$F(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

y el único punto de corte con el eje X es el punto (2, 0).

Ejercicios y problemas propuestos

Página 350

Para practicar

Integrales casi inmediatas

1 Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{4x^2 - 5x + 7}{2}\,dx$ **b)** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x}}$

c) $\int \frac{1}{2x+7}\,dx$ **d)** $\int (x - sen\,x)\,dx$

a) $\int \frac{4x^2 - 5x + 7}{2}\,dx = \int \left(2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}\right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{4} + \frac{7}{2}x + k$

b) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{x\,dx}{x^{1/3}} = \int x^{2/3}\,dx = \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} + k = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + k$

c) $\int \frac{1}{2x+7}\,dx = \frac{1}{2}\,ln\,|2x+7| + k$

d) $\int (x - sen\,x)\,dx = \frac{x^2}{2} + cos\,x + k$

2 Resuelve estas integrales:

a) $\int (x^2+1)^2\,dx$ **b)** $\int (x-5)^3\,dx$

c) $\int \sqrt{3x+5}\,dx$ **d)** $\int (cos\,x + e^x)\,dx$

a) $\int (x^2+1)^2\,dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + k$

b) $\int (x-5)^3\,dx = \frac{(x-5)^4}{4} + k$

c) $\int \sqrt{3x+5}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x+5)^{1/2}\,3\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{(3x+5)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+5)^3} + k$

d) $\int (cos\,x + e^x)\,dx = \int cos\,x\,dx + \int e^x\,dx = sen\,x + e^x + k$

3 Calcula:

a) $\int \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\,dx$ **b)** $\int \frac{7}{cos^2 x}\,dx$

c) $\int sen\,(x-4)\,dx$ **d)** $\int (e^{2x} + 3e^{-x})\,dx$

a) $\int \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int x^{2/3}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} + k = \frac{3}{5\sqrt[3]{2}}\,\sqrt[3]{x^5} + k$

b) $\int \frac{7}{cos^2 x}\,dx = 7\,tg\,x + k$

c) $\int sen\,(x-4)\,dx = -cos\,(x-4) + k$

d) $\int (e^{2x} + 3e^{-x})\,dx = \int e^{2x}\,dx + \int 3e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,2\,dx - 3\int e^{-x}\,(-1)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^{-x} + k$

4 **Halla las siguientes integrales:**

a) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx$ b) $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$ c) $\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx$

d) $\int \frac{-8}{1+x^2} dx$ e) $\int \frac{3x}{1+x^2} dx$ f) $\int \frac{x^2}{2-x^3} dx$

a) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx = 2\int \frac{1}{x} dx + 2\int x^{-2} dx = 2\ ln|x| - \frac{2}{x} + k$

b) $\int \frac{dx}{(x-1)^3} = \int (x-1)^{-3} dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} + k$

c) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-3/2}\right) dx = ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + k$

d) $\int \frac{-8}{1+x^2} dx = -8 arc\ tg\ x + k$

e) $\int \frac{3x}{1+x^2} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{3}{2} ln(1+x^2) + k$

f) $\int \frac{x^2}{2-x^3} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3x^2}{2-x^3} dx = -\frac{1}{3} ln|2-x^3| + k$

5 **Resuelve las integrales siguientes:**

a) $\int \frac{dx}{3x-4}$ b) $\int \frac{dx}{(3x-4)^2}$ c) $\int \sqrt{3x-4}\, dx$ d) $\int \sqrt[5]{\frac{1}{(3x-4)^3}} dx$

a) $\int \frac{dx}{3x-4} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{3x-4} = \frac{1}{3} ln|3x-4| + k$

b) $\int \frac{dx}{(3x-4)^2} = \frac{1}{3}\int (3x-4)^{-2}\, 3\, dx = -\frac{1}{3(3x-4)} + k$

c) $\int \sqrt{3x-4}\, dx = \frac{1}{3}\int (3x-4)^{1/2}\, 3\, dx = \frac{1}{3}\frac{(3x-4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{9}\sqrt{(3x-4)^3} + k$

d) $\int \sqrt[5]{\frac{1}{(3x-4)^3}} dx = \frac{1}{3}\int (3x-4)^{-3/5}\, 3\, dx = \frac{1}{3}\frac{(3x-4)^{2/5}}{\frac{2}{5}} + k = \frac{5}{6}\sqrt[5]{(3x-4)^2} + k$

6 **Halla las siguientes integrales del tipo exponencial:**

a) $\int e^{x-4} dx$ b) $\int e^{-2x+9} dx$ c) $\int e^{5x} dx$ d) $\int (3^x - x^3)\, dx$

a) $\int e^{x-4} dx = e^{x-4} + k$

b) $\int e^{-2x+9} dx = \frac{-1}{2}\int -2e^{-2x+9} dx = \frac{-1}{2} e^{-2x+9} + k$

c) $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + k$

d) $\int (3^x - x^3)\, dx = \frac{3^x}{ln\ 3} - \frac{x^4}{4} + k$

7 **Resuelve las siguientes integrales del tipo arco tangente:**

a) $\int \frac{2\,dx}{1+25x^2}$ b) $\int \frac{5dx}{100x^2+1}$ c) $\int \frac{4\,dx}{3+3x^2}$ d) $\int \frac{dx}{4+x^2}$

e) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$ f) $\int \frac{dx}{9+x^2}$ g) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$ h) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

a) $\int \frac{2\,dx}{1+25x^2} = \int \frac{2\,dx}{1+(5x)^2} = \frac{2}{5}\, arc\ tg\ 5x + k$

b) $\int \frac{5\,dx}{100x^2+1} = \int \frac{5\,dx}{(10x)^2+1} = \frac{5}{10}\, arc\ tg\ 10x + k = \frac{1}{2}\, arc\ tg\ 10x + k$

c) $\int \frac{4\,dx}{3+3x^2} = \int \frac{4\,dx}{3(1+x^2)} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{4}{3}\, arc\ tg\ x + k$

d) $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{1/4}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\, arc\ tg \left(\frac{x}{2}\right) + k$

e) $\int \frac{dx}{4+9x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\, arc\ tg\left(\frac{3x}{2}\right) + k = \frac{1}{6}\, arc\ tg\left(\frac{3x}{2}\right) + k$

f) $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}}\, arc\ tg\left(\frac{x}{3}\right) + k = \frac{1}{3}\, arc\ tg\left(\frac{x}{3}\right) + k$

g) $\int \frac{dx}{2+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}}\, arc\ tg\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) + k = \frac{\sqrt{2}}{4}\, arc\ tg\ (\sqrt{2}\,x) + k$

h) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx = arc\ tg\ (e^x) + k$

8 **Expresa el cociente de la forma $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$ y resuelve:**

a) $\int \frac{x^2}{x-3}\,dx$ b) $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1}\,dx$

c) $\int \frac{x^2-1}{x+2}\,dx$ d) $\int \frac{2x^2+2x+4}{x+2}\,dx$

e) $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$ f) $\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}\,dx$

a) $\int \frac{x^2}{x-3}\,dx = \int \left(x+3+\frac{9}{x-3}\right)dx = \int x\,dx + \int 3\,dx + \int \frac{9}{x-3}\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 9\ln|x-3| + k$

b) $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1}\,dx = \int \left(x-6+\frac{10}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 6x + 10\ \ln|x+1| + k$

c) $\int \frac{x^2-1}{x+2}\,dx = \int \left(x-2+\frac{3}{x+2}\right)dx = \int x\,dx - \int 2\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln|x+2| + k$

d) $\int \frac{2x^2+2x+4}{x+2}\,dx = \int \left(2x-2+\frac{8}{x+2}\right)dx = \int 2x\,dx - \int 2\,dx + \int \frac{8}{x+2}\,dx = x^2 - 2x + 8\ln|x+2| + k$

e) $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \int \left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)dx = \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \int x\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + k$

f) $\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}\,dx = \int \left(x^2-x-1-\frac{3}{x-2}\right)dx = \int x^2\,dx - \int x\,dx - \int dx - \frac{3}{x-2}\,dx =$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 3\ln|x-2| + k$

9 **Halla estas integrales sabiendo que son del tipo arco seno:**

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ **c)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-100x^2}}\,dx$ **d)** $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\,arc\ sen\,(2x) + k$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{1/2\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + k$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-100x^2}}\,dx = \frac{1}{10}\int \frac{10}{\sqrt{1-(10x)^2}}\,dx = \frac{1}{10}\,arc\ sen\,10x + k$

d) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-(\ln x)^2}} = arc\ sen\ \ln x + k$, ya que $D[\ln x] = \frac{1}{x}$.

10 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int sen\,x\cos x\,dx$ **b)** $\int \frac{sen\,x\,dx}{\cos^5 x}$ **c)** $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **d)** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}$

a) $\int sen\,x\cdot\cos x\,dx = \frac{sen^2 x}{2} + k$

b) $\int \frac{sen\,x\,dx}{\cos^5 x} = -\int(-sen\,x)\cdot\cos^{-5}x\,dx = \frac{-\cos^{-4}x}{-4} + k = \frac{1}{4\cos^4 x} + k$

c) $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\int -2x(9-x^2)^{-1/2}\,dx = -\frac{(9-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + k = -2\sqrt{9-x^2} + k$

d) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+5)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+5)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+5} + k$

11 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \sqrt{x^2-2x}\,(x-1)\,dx$ **b)** $\int \frac{arc\ sen\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **c)** $\int \sqrt{(1+\cos x)^3}\,sen\,x\,dx$

d) $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$ **e)** $\int \frac{2x^2}{(2-x^3)^2}\,dx$ **f)** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

a) $\int \sqrt{x^2-2x}\,(x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-2x}\,(2x-2)\,dx = \frac{1}{2}\int(x^2-2x)^{1/2}(2x-2)\,dx =$

$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-2x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{\sqrt{(x^2-2x)^3}}{3} + k$

b) $\int \frac{arc\ sen\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,arc\ sen\,x\,dx = \frac{arc\ sen^2 x}{2} + k$

c) $\int \sqrt{(1+\cos x)^3}\,sen\,x\,dx = -\int(1+\cos x)^{3/2}(-sen\,x)\,dx = -\frac{(1+\cos x)^{5/2}}{\frac{5}{2}} + k = \frac{-2\sqrt{(1+\cos x)^5}}{5} + k$

d) $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx = \int(1+\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{(1+\ln x)^3}{3} + k$

e) $\int \frac{2x^2}{(2-x^3)^2}\,dx = \frac{2}{3}\int\frac{3x^2}{(2-x^3)^2}\,dx = \frac{2}{3}\int(2-x^3)^{-2}\,3x^2\,dx = -\frac{2}{3(x^3-2)} + k$

f) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx = \int(1+e^x)^{-1/2}e^x\,dx = \frac{(1+e^x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + k = 2\sqrt{e^x+1} + k$

Integración por partes

12 **Aplica la integración por partes para resolver las siguientes integrales:**

a) $\int x\, e^{2x}\, dx$

b) $\int x^2 \ln x\, dx$

c) $\int 3x \cos x\, dx$

d) $\int \ln(2x-1)\, dx$

e) $\int \frac{x}{e^x}\, dx$

f) $\int \arccos x\, dx$

a) $\int x\, e^{2x}\, dx$

$$\begin{cases} u = x \;\to\; du = dx \\ dv = e^{2x}\, dx \;\to\; v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int x\, e^{2x}\, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + k$$

b) $\int x^2 \ln x\, dx$

$$\begin{cases} u = \ln x \;\to\; du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = x^2\, dx \;\to\; v = \frac{x^3}{2} \end{cases}$$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + k$$

c) $\int 3x \cos x\, dx = 3\int x \cos x\, dx$

$$\begin{cases} u = x \;\to\; du = dx \\ dv = \cos x\, dx \;\to\; v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$3\int x \cos x\, dx = 3\left[x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx\right] = 3\,[x \operatorname{sen} x + \cos x] + k = 3x \operatorname{sen} x + 3\cos x + k$$

d) $\int \ln(2x-1)\, dx$

$$\begin{cases} u = \ln 2x - 1 \;\to\; du = \frac{2}{2x-1} \\ dv = dx \;\to\; v = x \end{cases}$$

$$\int \ln(2x-1)\, dx = x \ln(2x-1) - \int \frac{2x}{2x-1}\, dx = x \ln(2x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right) dx =$$

$$= x \ln(2x-1) - x - \frac{1}{2} \ln(2x-1) + k$$

e) $\int \frac{x}{e^x}\, dx$

$$\begin{cases} u = x \;\to\; du = dx \\ dv = e^{-x}\, dx \;\to\; v = -e^{-x}\, dx \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{e^x}\, dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + k$$

f) $\int \arccos x\, dx$

$$\begin{cases} u = \arccos x \;\to\; du = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ dv = dx \;\to\; v = x \end{cases}$$

$$\int \arccos x\, dx = x \cdot \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + k$$

13 **Resuelve las siguientes integrales aplicando dos veces la integración por partes:**

a) $\int x^2 \, sen\, x\, dx$ b) $\int x^2 e^{2x} dx$ c) $\int e^x \cos x\, dx$ d) $\int (x+1)^2 e^x dx$

a) $\int x^2 \, sen\, x\, dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \to du = 2x\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \to v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x^2 \, sen\, x\, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2 \underbrace{\int x \cos x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \to du_1 = dx \\ dv_1 = \cos x\, dx \to v_1 = sen\, x \end{cases}$$

$$I_1 = x\, sen\, x - \int sen\, x\, dx = x\, sen\, x + \cos x$$

Por tanto:

$$\int x^2 \, sen\, x\, dx = -x^2 \cos x + 2x\, sen\, x + 2\cos x + k$$

b) $\int x^2 e^{2x} dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \to du = 2x\, dx \\ dv = e^{2x} dx \to v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \underbrace{\int x e^{2x} dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \to du_1 = dx \\ dv_1 = e^{2x} dx \to v_1 = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

Por tanto:

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + k = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + k$$

c) $\int e^x \cos x\, dx$

$$\begin{cases} u = e^x \to du = e^x dx \\ dv = \cos x\, dx \to v = sen\, x \end{cases}$$

$$I = e^x sen\, x - \underbrace{\int e^x sen\, x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u = e^x \to du = e^x dx \\ dv = sen\, x\, dx \to v = -\cos x \end{cases}$$

$$I_1 = -\cos x\, e^x + \int e^x \cos x\, dx$$

$$I = e^x sen\, x - (-\cos x\, e^x + I)$$

$$2I = e^x sen\, x + e^x \cos x$$

$$I = \frac{e^x sen\, x + e^x \cos x}{2} + k$$

d) $\int (x+1)^2 e^x \, dx$

$$\begin{cases} u = (x+1)^2 \ \to \ du = 2(x+1)\,dx \\ dv = e^x\,dx \ \to \ v = e^x \end{cases}$$

$$\int (x+1)^2 e^x\,dx = (x+1)^2 e^x - 2\underbrace{\int (x+1)\,e^x\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = (x+1) \ \to \ du_1 = dx \\ dv_1 = e^x\,dx \ \to \ v_1 = e^x \end{cases}$$

$$I_1 = (x+1)\,e^x - \int e^x\,dx = (x+1)\,e^x - e^x = (x+1-1)\,e^x = x\,e^x$$

Por tanto:

$$\int (x+1)^2 e^x\,dx = (x+1)^2 e^x - 2x\,e^x + k = (x^2+2x+1-2x)\,e^x + k = (x^2+1)\,e^x + k$$

Página 351

Integrales racionales

14 **Aplica la descomposición en fracciones simples para resolver las siguientes integrales:**

a) $\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx$ **b)** $\int \frac{3x^3}{x^2-4}\,dx$

c) $\int \frac{dx}{(x^2-25)(x-4)}$ **d)** $\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$

e) $\int \frac{4}{x^2+x-2}\,dx$ **f)** $\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx$

a) $\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx$

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} \quad \begin{cases} A = -1/5 \\ B = 1/5 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{-1/5}{x+3}\,dx + \int \frac{1/5}{x-2}\,dx = -\frac{1}{5}\,ln\,|x+3| + \frac{1}{5}\,ln\,|x-2| + k$$

b) $\int \frac{3x^3}{x^2-4}\,dx$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 & x^2-4 \\ \underline{-3x^3+12x} & 3x \\ \qquad 12x & \end{array} \qquad \frac{3x^3}{x^2-4} = 3x + \frac{12x}{x^2-4}$$

$$\int \frac{3x^3}{x^2-4}\,dx = \int \left(3x + \frac{12x}{x^2-4}\right)dx = \frac{3x^2}{2} + 6\,ln\,|x^2-4| + k$$

c) $\int \frac{dx}{(x^2-25)(x-4)} = \int \frac{dx}{(x+5)(x-5)(x-4)}$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x+5)(x-5)(x-4)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{x-4} \ \to \ A = \frac{1}{90},\ B = \frac{1}{10},\ C = -\frac{1}{9}$$

$$I = \frac{1}{90}\int \frac{1}{x+5}\,dx + \frac{1}{10}\int \frac{1}{x-5}\,dx - \frac{1}{9}\int \frac{1}{x-4}\,dx = \frac{1}{90}\,ln\,|x+5| + \frac{1}{10}\,ln\,|x-5| - \frac{1}{9}\,ln\,|x-4| + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$

Por el mismo procedimiento:

$$\frac{x^2+1}{x^2+x} = 1 + \frac{-x+1}{x^2+x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx = x + ln\,|x| - 2ln\,|x+1| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+x-2}\,dx$

$$\frac{4}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \;\to\; A = -\frac{4}{3},\; B = \frac{4}{3}$$

$$\int \frac{4}{x^2+x-2}\,dx = -\frac{4}{3}\,ln\,|x+2| + \frac{4}{3}\,ln\,|x-1| + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx$

$$\frac{x^2}{x^2+4x+3} = 1 - \frac{4x+3}{x^2+4x+3} = 1 - \left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}\right) \;\to\; A = \frac{9}{2},\; B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx = \int\left[1 - \left(\frac{9/2}{x+3} + \frac{-1/2}{x+1}\right)\right]dx = x - \frac{9}{2}\,ln\,|x+3| + \frac{1}{2}\,ln\,|x+1| + k$$

15 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)\,(x+5)}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\,(x+3)^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(2 + \frac{x-1}{x^2-3x+2}\right)dx = \int 2\,dx + \int \frac{x-1}{x^2-3x+2}\,dx = 2x + I_1$

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{x-1}{(x-1)\,(x-2)}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)}\,dx = ln\,|x-2|$$

Por tanto, $I = 2x + ln\,(x-2) + k$

b) $\displaystyle\int \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx = \int \frac{-16}{(x+3)\,(x-5)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-16}{(x+3)\,(x-5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} \;\to\; A = 2,\; B = -2$$

$$I = 2\int \frac{1}{x+3}\,dx - 2\int \frac{1}{x-5}\,dx = 2ln\,|x+3| - 2ln\,|x-5| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)} = \frac{A(x-1)\,(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2\,(x+3)}$$

$2x - 4 = A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x=1 & \to & -2=4B & \to\ B=-1/2 \\ x=-3 & \to & -10=16C & \to\ C=-5/8 \\ x=0 & \to & -4=-3A+3B+C & \to\ A=5/8 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)}\,dx = \int \frac{5/8}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-5/8}{x+3}\,dx =$$

$$= \frac{5}{8}\,ln\,|x-1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{5}{8}\,ln\,|x+3| + k = \frac{5}{8}\,ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right) + \frac{1}{2x-2} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)(x+5)}$$

$2x + 3 = A(x+5) + B(x-2)$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{llll} x=2 & \to & 7=7A & \to\ A=1 \\ x=-5 & \to & -7=-7B & \to\ B=1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+5}\,dx = ln\,|x-2| + ln\,|x+5| + k = ln\,|(x-2)(x+5)| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1)}{(x-1)(x+3)^2}$$

$1 = A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1)$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x=1 & \to & 1=16A & \to\ A=1/16 \\ x=-3 & \to & 1=-4C & \to\ C=-1/4 \\ x=0 & \to & 1=9A-3B-C & \to\ B=-1/16 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx = \int \frac{1/16}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/16}{x+3}\,dx + \int \frac{-1/4}{(x+3)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\,ln\,|x-1| - \frac{1}{16}\,ln\,|x+3| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+3)} + k = \frac{1}{16}\,ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \frac{1}{4(x+3)} + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$3x - 2 = A(x+2) + B(x-2)$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lll} x = 2 & \to \ 4 = 4A & \to \ A = 1 \\ x = -2 & \to \ -4 = -4B & \to \ B = 2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx = ln\,|x-2| + 2ln\,|x+2| + k = ln\,[|x-2|\,(x+2)^2] + k$$

Integrales por sustitución

16 **Aplica el método de sustitución para resolver las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ **b)** $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}-1}$ **d)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$

a) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^2 \to dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{t^2-t} = \int \frac{2\,dt}{t-1} = 2ln\,|t-1| + k = 2ln\,|\sqrt{x}-1| + k$$

b) Para eliminar la raíz hacemos $x + 2 = t^3 \to dx = 3t^2\,dt \quad (x = t^3 - 2)$

$$\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx = \int (t^3-2)\,t \cdot 3t^2\,dt = 3\int (t^6 - 2t^3)\,dt = \frac{3t^7}{7} - \frac{3t^4}{2} + k = \frac{3\sqrt[3]{(x+2)^7}}{7} - \frac{3\sqrt[3]{(x+2)^4}}{2} + k$$

c) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^6 \to dx = 6t^5\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}-1} = \int \frac{t^3}{t^2-1}6t^5\,dt = 6\int \frac{t^8}{t^2-1}\,dt = 6\int\left(t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

Calculamos, usando el método de descomposición en fracciones simples:

$$\int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \int \frac{1}{(t+1)(t-1)}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\,dt = -\frac{1}{2}\,ln\,|t+1| + \frac{1}{2}\,ln\,|t-1| + k$$

Ya que $\dfrac{1}{(t+1)(t-1)} = \dfrac{-1/2}{t+1} + \dfrac{1/2}{t-1}$.

Terminamos el cálculo de la integral:

$$I = 6\left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t - \frac{1}{2}\,ln\,|t+1| + \frac{1}{2}\,ln\,|t-1|\right) + k =$$

$$= \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} + \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 3ln\,|\sqrt[6]{x}+1| + 3ln\,|\sqrt[6]{x}-1| + k$$

d) Para eliminar la raíz hacemos $2 - x = t^2 \to -dx = 2t\,dt \to dx = -2t\,dt \quad (x = 2 - t^2)$

$$\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}} = \int \frac{-2t\,dt}{[3-(2-t^2)]\,t} = \int \frac{-2d\,dt}{t^2+1} = -2arc\ tg\ t + k = -2arc\ tg\ \sqrt{2-x} + k$$

Para resolver

17 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int x^4 e^{x^5}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int x\ sen\ x^2\,dx$ **c)** $\displaystyle\int x \cdot 2^{-x}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int x^3\ sen\ x\,dx$

e) $\displaystyle\int \sqrt{(x+3)^5}\,dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{-3x}{2-6x^2}\,dx$ **g)** $\displaystyle\int e^{2x+1}\cos x\,dx$ **h)** $\displaystyle\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

a) $\displaystyle\int x^4 e^{x^5}\,dx = \frac{1}{5}\int 5x^4 e^{x^5}\,dx = \frac{1}{5}e^{x^5} + k$

b) $\displaystyle\int x\ sen\ x^2\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\ sen\ x^2\,dx = \frac{-1}{2}\cos x^2 + k$

c) $\int x \cdot 2^{-x}\, dx$

$$\begin{cases} u = x \;\to\; du = dx \\ dv = 2^{-x}\, dx \;\to\; v = \dfrac{-2^{-x}}{ln\, 2} \end{cases}$$

$$\int x\, 2^{-x}\, dx = \frac{-x \cdot 3^{-x}}{ln\, 2} + \int \frac{2^{-x}}{ln\, 2}\, dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{ln\, 2} + \frac{1}{ln\, 2}\int 2^{-x}\, dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{ln\, 2} - \frac{2^{-x}}{(ln\, 2)^2} + k$$

d) $\int x^3\, sen\, x\, dx$

$$\begin{cases} u = x^3 \;\to\; du = 3x^2\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \;\to\; v = -cos\, x \end{cases}$$

$$\int x^3\, sen\, x\, dx = -x^3\, cos\, x + 3\underbrace{\int x^2\, cos\, x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x^2 \;\to\; du_1 = 2x\, dx \\ dv_1 = cos\, x\, dx \;\to\; v_1 = sen\, x \end{cases}$$

$$I_1 = x^2\, sen\, x - 2\underbrace{\int x\, sen\, x\, dx}_{I_2}$$

$$\begin{cases} u_2 = x \;\to\; du_2 = dx \\ dv_2 = sen\, x\, dx \;\to\; v_2 = -cos\, x \end{cases}$$

$$I_2 = -x\, cos\, x + \int cos\, x\, dx = -x\, cos\, x + sen\, x$$

Así: $I_1 = x^2\, sen\, x + 2x\, cos\, x - 2sen\, x$

Por tanto:

$$\int x^3\, sen\, x\, dx = -x^3\, cos\, x + 3x^2\, sen\, x + 6x\, cos\, x - 6sen\, x + k$$

e) $\int \sqrt{(x+3)^5}\, dx = \int (x+3)^{5/2}\, dx = \dfrac{(x+3)^{7/2}}{7/2} = \dfrac{2}{7}\sqrt{(x+3)^7} + k$

f) $\int \dfrac{-3x}{2-6x^2}\, dx = \dfrac{1}{4}\int \dfrac{-12x}{2-6x^2}\, dx = \dfrac{1}{4}\, ln\, |2-6x^2| + k$

g) Esta es una integral que se resuelve aplicando el método de integración por partes dos veces:

$$I = \int e^{2x+1}\, cos\, x\, dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = e^{2x+1} \;\to\; du = 2e^{2x+1}\, dx \\ dv = cos\, x\, dx \;\to\; v = sen\, x \end{cases}$$

$$I = e^{2x+1}\, sen\, x - 2\int e^{2x+1}\, sen\, x\, dx = e^{2x+1}\, sen\, x - 2I_1$$

$$I_1 = \int e^{2x+1}\, sen\, x\, dx$$

Integramos I_1 por partes:

$$\begin{cases} u = e^{2x+1} \;\to\; du = 2e^{2x+1}\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \;\to\; v = -cos\, x \end{cases}$$

$$I_1 = -e^{2x+1}\, cos\, x + 2\int e^{2x+1}\, cos\, x\, dx$$

Sustituyendo en I:

$$\int e^{2x+1}\cos x\,dx = e^{2x+1}\,sen\,x - 2\left(-e^{2x+1}\cos x + 2\int e^{2x+1}\cos x\,dx\right) =$$

$$= e^{2x+1}\,sen\,x + 2e^{2x+1}\cos x - 4\int e^{2x+1}\cos x\,dx$$

Pasamos la integral al primer miembro y despejamos:

$$\int e^{2x+1}\cos x\,dx = \frac{e^{2x+1}\,sen\,x + 2e^{2x+1}\cos x}{5} + k = \frac{e^{2x+1}}{5}(sen\,x + 2\cos x) + k$$

h) $\int x^5 e^{-x^3}\,dx = \int x^3 \cdot x^2 e^{-x^3}\,dx$

$$\begin{cases} u = x^3 \;\rightarrow\; du = 3x^2\,dx \\ dv = x^2 e^{-x^3}\,dx \;\rightarrow\; v = \dfrac{-1}{3}e^{-x^3} \end{cases}$$

$$\int x^5 e^{-x^3}\,dx = \frac{-x^3}{3}e^{-x^3} + \int x^2 e^{-x^3}\,dx = \frac{-x^3}{3}e^{-x^3} - \frac{1}{3}e^{-x^3} + k = \frac{(-x^3-1)}{3}e^{-x^3} + k$$

18 Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx$

b) $\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx$

c) $\int \frac{x+2}{2x^2+x-1}\,dx$

d) $\int \frac{x-1}{4x^2-9}\,dx$

e) $\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$

f) $\int \frac{3x-1}{2x^2+8}\,dx$

a) $\int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\,arc\,tg\,x + k$

(1) Hacemos $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+1} = \int\left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}\right)dx$

b) $\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$1 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2$$

Calculamos A, B, C y D dando a x los valores 1, –1, 0 y 2:

$$\left.\begin{array}{ll} x=1 & \rightarrow 1 = 4B \rightarrow B = 1/4 \\ x=-1 & \rightarrow 1 = 4D \rightarrow D = 1/4 \\ x=0 & \rightarrow 1 = -A+B+C+D \rightarrow 1/2 = -A+C \\ x=2 & \rightarrow 1 = 9A+9B+3C+D \rightarrow -3/2 = 9A+3C \rightarrow -1/2 = 3A+C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = -1/4 \\ B = 1/4 \\ C = 1/4 \\ D = 1/4 \end{array}$$

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx = \int \frac{-1/4}{(x-1)}\,dx + \int \frac{1/4}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1/4}{(x+1)}\,dx + \int \frac{1/4}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{-1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)} + k =$$

$$= \frac{-1}{4}\left[\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right] + k = \frac{-1}{4}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{2x}{x^2-1}\right] + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x^2+x-1}\,dx = \int \frac{x+2}{(x+1)(2x-1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{(x+1)(2x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} \rightarrow A = -\frac{1}{3},\ B = \frac{5}{3}$$

$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{2x-1} = -\frac{1}{3}\,ln\,(x+1) + \frac{5}{6}\,ln\,(2x-1) + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{4x^2-9}\,dx = \int \frac{x-1}{(2x+3)(2x-3)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x-1}{(2x+3)(2x-3)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2x-3} \rightarrow A = \frac{5}{12},\ B = \frac{1}{12}$$

$$I = \frac{5}{12}\int \frac{dx}{2x+3} + \frac{1}{12}\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{5}{24}\,ln\,(2x+3) + \frac{1}{24}\,ln\,(2x-3) + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples (para ello, encontramos las raíces del denominador):

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$2x^2+7x-1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x=1 & \rightarrow & 8=4A & \rightarrow\ A=2 \\ x=-1 & \rightarrow & -6=-2C & \rightarrow\ C=3 \\ x=0 & \rightarrow & -1=A-B-C & \rightarrow\ B=0 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx = 2ln\,|x-1| - \frac{3}{x+1} + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{2x^2+8}\,dx$

Como el denominador no tiene raíces:

$$I = \frac{3}{4}\int \frac{4x}{2x^2+8}\,dx - \int \frac{dx}{2x^2+8} = \frac{3}{4}\,ln\,(2x^2+8) - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{3}{4}\,ln\,(2x^2+8) - \frac{1}{8}\,\frac{1}{\frac{1}{2}}\,arc\ tg\,\frac{x}{2} + k = \frac{3}{4}\,ln\,(2x^2+8) - \frac{1}{4}\,arc\ tg\,\frac{x}{2} + k$$

19 **Resuelve las integrales siguientes:**

a) $\displaystyle\int \frac{ln\, x}{x}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1 - sen\, x}{x + cos\, x}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\, ln\, x}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1 + e^x}{e^x + x}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{sen\, \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

f) $\displaystyle\int ln\,(x - 3)\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{ln\, \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

h) $\displaystyle\int ln\,(x^2 + 1)\, dx$

a) $\displaystyle\int \frac{ln\, x}{x}\, dx = \int \frac{1}{x}\, ln\, x\, dx = \frac{ln^2 |x|}{2} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{1 - sen\, x}{x + cos\, x}\, dx = ln\, |x + cos\, x| + k$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\, ln\, x}\, dx = \int \frac{1/x}{ln\, x}\, dx = ln\, |ln\, |x|| + k$

d) $\displaystyle\int \frac{1 + e^x}{e^x + x}\, dx = ln\, |e^x + x| + k$

e) $\displaystyle\int \frac{sen\, \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = -2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, (-sen\, \sqrt{x})\, dx = -2cos\,(\sqrt{x}) + k$

f) $\displaystyle\int ln\,(x - 3)\, dx$

$$\begin{cases} u = ln\,(x - 3) \;\to\; du = \dfrac{1}{x - 3}\, dx \\ dv = dx \;\to\; v = x \end{cases}$$

$$\int ln\,(x - 3)\, dx = x\, ln\, |x - 3| - \int \frac{x}{x - 3}\, dx = x\, ln\, |x - 3| - \int 1 + \frac{3}{x - 3}\, dx =$$

$$= x\, ln\, |x - 3| - x - 3ln\, |x - 3| + k = (x - 3)\, ln\, |x - 3| - x + k$$

g) $\displaystyle\int \frac{ln\, \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

$$\begin{cases} u = ln\, \sqrt{x} \;\to\; du = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}\, dx \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx \;\to\; dv = 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\int \frac{ln\, \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}\, ln\, \sqrt{x} - \int \frac{2\sqrt{x}}{2x}\, dx = 2\sqrt{x}\, ln\, \sqrt{x} - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\, ln\, \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + k = 2\sqrt{x}\, (ln\, \sqrt{x} - 1) + k$$

h) $\displaystyle\int ln\,(x^2 + 1)\, dx$

$$\begin{cases} u = ln\,(x^2 + 1) \;\to\; du = \dfrac{2x}{x^2 + 1}\, dx \\ dv = dx \;\to\; v = x \end{cases}$$

$$\int ln\,(x^2 + 1)\, dx = x\, ln\,(x^2 + 1) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 1}\, dx = x\, ln\,(x^2 + 1) - \int \left(2 - \frac{2}{x^2 + 1}\right) dx =$$

$$= x\, ln\,(x^2 + 1) - 2x + 2\, arc\, tg\, x + k$$

20 Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{sen\,(1/x)}{x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x}{x+2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{arc\ tg\ x}{1+x^2}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{sen\ x}{cos^4 x}\,dx$

e) $\displaystyle\int (ln\ x)^2\,dx$ f) $\displaystyle\int e^x\cos e^x\,dx$ g) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{1+x}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{sen\,(1/x)}{x^2}\,dx = -\int \frac{-1}{x^2}\,sen\left(\frac{1}{x}\right)dx = cos\left(\frac{1}{x}\right) + k$

b) $\displaystyle\int \frac{2x}{x+2}\,dx = \int\left(2-\frac{4}{x+2}\right)dx = \int 2\,dx - 4\int\frac{dx}{x+2} = 2x - 4\,ln\,|x+2| + k$

c) $\displaystyle\int \frac{arc\ tg\ x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,arc\ tg\ x\,dx = \frac{arc\ tg^2\ x}{2} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\ x}{cos^4 x}\,dx = -\int (-sen\ x)\,(cos\ x)^{-4}\,dx = \frac{-(cos\ x)^{-3}}{-3} + k = \frac{1}{3cos^3\ x} + k$

e) $\displaystyle\int (ln\ x)^2\,dx$

$$\begin{cases} u = (ln\ x)^2 \to du = 2\,(ln\ x)\cdot\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \to v = x \end{cases}$$

$\displaystyle\int (ln\ x)^2\,dx = x\,(ln\ x)^2 - 2\int ln\ x\,dx = x\,ln^2\,|x| - 2x\,ln\,|x| + 2x + k$

f) $\displaystyle\int e^x\,cos\ e^x\,dx = sen\ e^x + k$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{-1}{(x+1)\,(x-1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-1}{(x+1)\,(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A\,(x-1)+B\,(x+1)}{(x+1)\,(x-1)}$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lll} x=-1 & \to\ -1=-2A & \to\ A=1/2 \\ x=1 & \to\ -1=2B & \to\ B=-1/2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int\left(\frac{1/2}{x+1} + \frac{-1/2}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}\,ln\,|x+1| - \frac{1}{2}\,ln\,|x-1| + k = ln\,\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + k$$

h) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{1+x}\,dx = \int \frac{x^2-2x+1}{x+1}\,dx = \int\left(x-3+\frac{4}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 4\,ln\,|x+1| + k$

21 Resuelve por sustitución:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \sqrt{3x-2}\,dx$

a) Hacemos $e^x = t^2 \to e^x\,dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}}\,dx = \int \frac{2t}{1-t}\,dt = \int\left(-2-\frac{2}{t-1}\right)dt = -2t - 2ln\,(t-1) + k = -2\sqrt{e^x} - 2ln\,(\sqrt{e^x}-1) + k$$

b) Hacemos $3x-2 = t^2 \to 3\,dx = 2t\,dt \to dx = \frac{2}{3}\,t\,dt$

$$\int \sqrt{3x-2}\,dx = \int t\cdot\frac{2}{3}\,t\,dt = \frac{2}{3}\int t^2\,dt = \frac{2t^3}{9} + k = \frac{2\sqrt{(3x-2)^3}}{9} + k$$

22 Resuelve:

a) $\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$

a) $\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$= -\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + 4\,arc\ sen\ x + k = -\sqrt{1-x^2} + 4arc\ sen\ x + k$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} = \frac{1}{2}\,arc\ sen\,(2x-3) + k$

23 Calcula estas integrales:

a) $\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$ **b)** $\int \frac{x^2-3}{x^2-2x+5}\,dx$

c) $\int \frac{x^4-2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx$ **d)** $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}\,dx$

a) $\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx = \int \frac{5x^2}{(x-1)^3}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$\frac{5x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \to A = 5,\ B = 10,\ C = 5$

$I = 5\int \frac{dx}{x-1} + 10\int (x-1)^{-2}\,dx + 5\int (x-1)^{-3}\,dx = 5ln\,|x-1| - \frac{10}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)^2} + k$

b) $\int \frac{x^2-3}{x^2-2x+5}\,dx = \int\left(1 + \frac{2x-8}{x^2-2x+5}\right)dx = \int dx + \int \frac{2x-8}{x^2-2x+5}\,dx$

Calculamos la segunda integral teniendo en cuenta que el denominador no tiene raíces.

$I_1 = \int \frac{2x-8}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{2x-2-6}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx - 6\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = ln\,(x^2-2x+5) - 6I_2$

$I_2 = \int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{1}{x^2-2x+1+4}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,dx =$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\,arc\ tg\,\frac{x-1}{2} + k = \frac{1}{2}\,arc\ tg\,\frac{x-1}{2} + k$

Sustituimos en I_1:

$I_1 = ln\,(x^2-2x+5) - 3arc\ tg\,\frac{x-1}{2} + k$

Sustituimos en I:

$I = x + ln\,(x^2-2x+5) - 3arc\ tg\,\frac{x-1}{2} + k$

c) $\int \frac{x^4-2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int\left(x-1-\frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x}\right)dx = \int (x-1)\,dx - \int \frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x}\,dx$

Calculamos la segunda integral descomponiendo en fracciones simples:

$\frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x} = \frac{-3x^2+4x+6}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} \to A = -3,\ B = -\frac{7}{3},\ C = \frac{7}{3}$

$\int \frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x}\,dx = -3\int \frac{dx}{x} - \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x-1} = -3\,ln\,x - \frac{7}{3}\,ln\,(x+2) + \frac{7}{3}\,ln\,(x-1) + k$

Sustituimos en I:

$$I = \frac{x^2}{2} - x + 3\ ln\ x + \frac{7}{3}\ ln\ (x+2) - \frac{7}{3}\ ln\ (x-1) + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)\,(x^2+9)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)\,(x^2+9)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+9} \ \rightarrow\ A = 2,\ \ M = 0,\ \ N = 12$$

$$I = 2\int \frac{dx}{x-2} + 12\int \frac{dx}{x^2+9}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}}\ arc\ tg\ \frac{x}{3} + k = \frac{1}{3}\ arc\ tg\ \frac{x}{3} + k$$

Sustituimos en I:

$$I = 2ln\ (x-2) + 4\ arc\ tg\ \frac{x}{3} + k$$

24 Resuelve estas integrales utilizando un cambio de variable:

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt[4]{x}}$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

Cambio: $x + 2 = t^2 \ \rightarrow\ dx = 2t\,dt$

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)\,t\cdot 2t\,dt = \int (2t^4-2t^2)\,dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + k = \frac{2\sqrt{(x+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt[4]{x}}$

Cambio: $x = t^4 \ \rightarrow\ dx = 4t^3\,dt$

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3\,dt}{t^4-t} = \int \frac{4t^2\,dt}{t^3-1} = \frac{4}{3}\int \frac{3t^2\,dt}{t^3-1} = \frac{4}{3}\ ln\,|t^3-1| + k = \frac{4}{3}\ ln\,|\sqrt[4]{x^3}-1| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \ \rightarrow\ dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{(t^2-1)}{t}\cdot 2t\,dt = \int (2t^2-2)\,dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + k = \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} - 2\sqrt{x+1} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \ \rightarrow\ dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{(t^2-1)\,t} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)\,(t-1)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{(t+1)\,(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+B(t+1)}{(t+1)\,(t-1)}$$

$$2 = A(t-1) + B(t+1)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lll} t=-1 & \to\ 2=-2A & \to\ A=-1 \\ t=1 & \to\ 2=2B & \to\ B=1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2\,dt}{(t+1)(t-1)} = \int \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t-1} \right) dt = -ln\,|t+1| + ln\,|t-1| + k = ln\left| \frac{t-1}{t+1} \right| + k$$

Así:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = ln\left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

Cambio: $x = t^2 \ \to\ dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{t^2+t} = \int \frac{2\,dt}{t+1} = 2\,ln\,|t+1| + k = 2\,ln\,(\sqrt{x}+1) + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

Cambio: $x = t^2 \ \to\ dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \int \frac{t \cdot 2t\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2t^2\,dt}{1+t^2} = \int \left(2 - \frac{2}{1+t^2} \right) dt = 2t - 2\,arc\ tg\ t + k = 2\sqrt{x} - 2\,arc\ tg\ \sqrt{x} + k$$

25 Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\,(tg\ x)}{cos^2 x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx \overset{(1)}{=} \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx = \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) = x - ln\,(1+e^x) + k$

(1) Sumamos y restamos e^x en el numerador.

b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx + \int \frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx + \int \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$

$$= -\sqrt{9-x^2} + 3\int \frac{1/3}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx = -\sqrt{9-x^2} + 3\,arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right) + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

Hacemos el cambio: $e^x = t \ \to x = ln\ t \ \to\ dx = \frac{1}{t}\,dt$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \int \frac{1/t}{t^2-3t}\,dt = \int \frac{1}{t^3-3t^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2(t-3)}\,dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-3} = \frac{At(t-3)+B(t-3)+Ct^2}{t^2(t-3)}$$

$1 = At(t-3) + B(t-3) + Ct^2$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} t=0 & \to & 1=-3B & \to \quad B=-1/3 \\ t=3 & \to & 1=9C & \to \quad C=1/9 \\ t=1 & \to & 1=-2A-2B+C & \to \quad A=-1/9 \end{array}\right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{1}{t^2(t-3)}\,dt = \int\left(\frac{-1/9}{t} + \frac{-1/3}{t^2} + \frac{1/9}{t-3}\right)dt = \frac{-1}{9}\,ln\,|t| + \frac{1}{3t} + \frac{1}{9}\,ln\,|t-3| + k$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{-1}{9}\,ln\,e^x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\,ln\,|e^x-3| + k = -\frac{1}{9}\,x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\,ln\,|e^x-3| + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\,(tg\,x)}{cos^2 x}\,dx = -cos\,(tg\,x) + k$, ya que $D\,[tg\,x] = \dfrac{1}{cos^2 x}$.

e) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

Hacemos el cambio: $e^x = t \;\to\; x = ln\,t \;\to\; dx = \dfrac{1}{t}\,dt$

$$\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t^3-t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt = \int\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= t - 2\,arc\,tg\,t + k = e^x - 2\,arc\,tg\,(e^x) + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Hacemos el cambio: $x = t^2 \;\to\; dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = \int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt = 2t - 2\,ln\,|1+t| + k = 2\sqrt{x} - 2\,ln\,(1+\sqrt{x}) + k$$

Página 352

26 Para resolver la integral $\int cos^3 x\,dx$, hacemos:

$$\boldsymbol{cos^3 x = cos\,x\,cos^2 x = cos\,x\,(1-sen^2 x) = cos\,x - cos\,x\,sen^2 x}$$

Resuélvela y calcula después $\int sen^3 x\,dx$.

$$\int cos^3 x\,dx = \int (cos\,x - cos\,x\cdot sen^2 x)\,dx = \int cos\,x\,dx - \int sen^2 x\cdot cos\,x\,dx = sen\,x - \frac{sen^3 x}{3} + k$$

Para la segunda parte del problema calculamos:

$$sen^3 x = sen\,x\cdot sen^2 x = sen\,x\,(1-cos^2 x) = sen\,x - sen\,x\cdot cos^2 x$$

$$\int sen^3 x\,dx = \int (sen\,x - sen\,x\cdot cos^2 x)\,dx = \int sen\,x\,dx + \int cos^2 x\,(-sen\,x)\,dx = -cos\,x + \frac{cos^3 x}{3} + k$$

27 Calcula las siguientes integrales utilizando las relaciones trigonométricas:

a) $\displaystyle\int (sen^2 x + 2\,cos\,2x)\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{(1-2\,cos^2 x)\,cos\,x}{cos\,2x}$

c) $\displaystyle\int (sen^2 x\cdot sen\,2x)\,dx$ **d)** $\displaystyle\int (cos^2 x - cos\,2x)\,dx$

* ***Ayuda: Ten en cuenta que $1 + cos\,2x = 2cos^2 x$ y que $1 - cos\,2x = 2sen^2 x$.***

a) Teniendo en cuenta que $sen^2 x + 2cos\,2x = \dfrac{1-cos\,2x}{2} + 2cos\,2x = \dfrac{3}{2}\,cos\,2x + \dfrac{1}{2}$, obtenemos:

$$\int (sen^2 x + 2cos\,2x)\,dx = \int\left(\frac{3}{2}\,cos\,2x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{3}{4}\,sen\,2x + \frac{x}{2} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{(1-2cos^2 x)\, cos\, x}{cos\, 2x}\, dx = \int \frac{(1-2cos^2 x)\, cos\, x}{cos\, 2x}\, dx = \int \frac{-cos\, 2x \cdot cos\, x}{cos\, 2x}\, dx = -\int cos\, x\, dx = -sen\, x + k$

c) Teniendo en cuenta que $sen^2 x \cdot sen\, 2x = \frac{1-cos\, 2x}{2}\, sen\, 2x = \frac{sen\, 2x}{2} - \frac{sen\, 2x \cdot cos\, 2x}{2}$, obtenemos:

$$\int sen^2 x \cdot sen\, 2x\, dx = \int \left(\frac{sen\, 2x}{2} - \frac{sen\, 2x \cdot cos\, 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int sen\, 2x \cdot 2\, dx - \frac{1}{4} \int sen\, 2x \cdot cos\, 2x \cdot 2\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\, cos\, 2x - \frac{1}{4}\, \frac{sen^2\, 2x}{2} + k = -\frac{1}{4}\, cos\, 2x - \frac{1}{8}\, sen^2\, 2x + k$$

d) Teniendo en cuenta que $cos^2 x - cos\, 2x = \frac{1+cos\, 2x}{2} - cos\, 2x = \frac{1}{2} - \frac{cos\, 2x}{2}$, obtenemos:

$$\int (cos^2 x - cos\, 2x)\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{cos\, 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int cos\, 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{sen\, 2x}{4} + k$$

28 **Calcula** $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x+1)^2}\, dx$

a) Por descomposición en fracciones simples.

b) Mediante un cambio de variable.

a) $\displaystyle I = \int \frac{x^3}{(x+1)^2}\, dx = \int \left(x - 2 + \frac{3x+2}{(x+1)^2} \right) dx = \int (x-2)\, dx + \int \frac{3x+2}{(x+1)^2}\, dx$

Descomponemos la segunda integral en fracciones simples:

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \ \to\ A = 3,\ B = -1$$

$$\int \frac{3x+2}{(x+1)^2}\, dx = 3 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = 3\, ln\, |x+1| + \frac{1}{x+1}$$

Sustituimos en I:

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\, ln\, |x+1| + \frac{1}{x+1} + k$$

b) Llamamos $u = x + 1 \ \to\ du = dx \quad (x = u - 1)$

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^2}\, dx = \int \frac{(u-1)^3}{u^2}\, du = \int \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u^2}\, du = \int \left(u - 3 + \frac{3}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du =$$

$$= \frac{u^2}{2} - 3u + 3\, ln\, u + \frac{1}{u} + k = \frac{(x+1)^2}{2} - 3(x+1) + 3\, ln\, |x+1| + \frac{1}{x+1} + k$$

29 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$

b) $\displaystyle\int \frac{(x+5)\, dx}{x^2+2x+3}$

c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+2x^2+3x}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^3+x}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+8}{x^2+9}\, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

a) El denominador no tiene raíces.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = arc\ tg\, (x+2) + k$$

b) El denominador no tiene raíces.

$$I = \int \frac{(x+5)\, dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - \frac{1}{2} \cdot 2 + 5}{x^2+2x+3}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\, dx + 4 \int \frac{1}{x^2+2x+3}\, dx = \frac{1}{2}\, I_1 + 4 I_2$$

$I_1 = ln\,(x^2 + 2x + 3) + k$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1 + 2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,arc\ tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k = \frac{\sqrt{2}}{2}\,arc\ tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

Por tanto:

$$I = \frac{1}{2}\,ln\,(x^2 + 2x + 3) + 2\sqrt{2}\,arc\ tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

c) $I = \displaystyle\int \frac{x+1}{x^3 + 2x^2 + 3x}\,dx = \int \frac{x+1}{x(2x + x^2 + 3)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+1}{x(2x + x^2 + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 3} \to A = \frac{1}{3},\ M = -\frac{1}{3},\ N = \frac{1}{3}$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 3}\,dx = \frac{1}{3}\,ln\,|x| - \frac{1}{3}\,I_1$$

$$I_1 = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - \frac{1}{2}\cdot 2 - 1}{x^2 + 2x + 3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 3}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3}\,dx =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2}\,ln\,(x^2 + 2x + 3) - \sqrt{2}\,arc\ tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

(∗) La segunda integral está resuelta en el apartado anterior.

Por tanto:

$$I = \frac{1}{3}\,ln\,x - \frac{1}{6}\,ln\,(x^2 + 2x + 3) + \frac{\sqrt{2}}{3}\,arc\ tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

d) $I = \displaystyle\int \frac{2x-1}{x^3 + x}\,dx = \int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} \to A = -\frac{1}{2},\ M = 1,\ N = 2$$

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+2}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx\,2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\,ln\,x + \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1) + 2\,arc\ tg\,x + k$$

e) $I = \displaystyle\int \frac{x^2 + 3x + 8}{x^2 + 9}\,dx = \int \left(1 + \frac{3x-1}{x^2+9}\right)dx = \int dx + \int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx$

$$\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{3}{2}\,ln\,(x^2+9) - \frac{1}{3}\,arc\ tg\,\frac{x}{3} + k$$

Ya que:

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{1}{\frac{1}{3}}\,arc\ tg\,\frac{x}{3} + k = \frac{1}{3}\,arc\ tg\,\frac{x}{3} + k$$

Sustituyendo en I:

$$I = x + \frac{3}{2}\,ln\,(x^2+9) - \frac{1}{3}\,arc\ tg\,\frac{x}{3} + k$$

f) $I = \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \to A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2},\ M = -\frac{1}{2},\ N = 0$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,ln\,(x+1) - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\,ln\,(x^2+1) + k$$

30 **Encuentra la primitiva de $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$ que pasa por el punto (0, 3).**

$$F(x) = \int \frac{3x}{1-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\,ln\,|1-x^2| + k$$

Como pasa por (0, 3) se cumple que $F(0) = 3$.

$$-\frac{3}{2} + k = 3 \to k = \frac{9}{2}$$

Luego la primitiva buscada es $F(x) = -\frac{3}{2}\,ln\,|1-x^2| + \frac{9}{2}$.

31 **Halla la función F para la que $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ y $F(1) = 2$.**

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x} + k$$

$$F(1) = -1 + k = 2 \to k = 3$$

Por tanto: $F(x) = \frac{-1}{x} + 3$

32 **De todas las primitivas de la función $y = 4x - 6$, ¿cuál de ellas toma el valor 4 para $x = 1$?**

$$F(x) = \int (4x-6)\,dx = 2x^2 - 6x + k$$

$$F(1) = 2 - 6 + k = 4 \to k = 8$$

Por tanto: $F(x) = 2x^2 - 6x + 8$

33 **Halla $f(x)$ sabiendo que:**

$$f''(x) = 6x,\ f'(0) = 1 \text{ y } f(2) = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \int 6x\,dx = 3x^2 + c \\ f'(0) = c = 1 \end{array}\right\} f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \int (3x^2+1)\,dx = x^3 + x + k \\ f(2) = 10 + k = 5 \end{array}\right\} \to k = -5$$

Por tanto: $f(x) = x^3 + x - 5$

34 **Encuentra una primitiva de $f(x) = x^2\,sen\,x$ cuyo valor para $x = 0$ sea 1.**

$$F(x) = \int x^2\,sen\,x\,dx$$

Integramos por partes:

$$\left\{\begin{array}{l} u = x^2 \to du = 2x\,dx \\ dv = sen\,x\,dx \to v = -cos\,x \end{array}\right.$$

$F(x) = -x^2 \cdot cos\ x + 2\int x \cdot cos\ x\ dx = -x^2 \cdot cos\ x + 2I$

Integramos I por partes:

$$\begin{cases} u = x \ \rightarrow\ du = dx \\ dv = cos\ x\ dx \ \rightarrow\ v = sen\ x \end{cases}$$

$I = x \cdot sen\ x - \int sen\ x\ dx = x \cdot sen\ x + cos\ x$

Sustituimos en F:

$F(x) = -x^2 \cdot cos\ x + 2x \cdot sen\ x + 2cos\ x + k$

Ahora se debe cumplir que $F(0) = 1 \ \rightarrow\ 2 + k = 1 \ \rightarrow\ k = -1$.

La primitiva es $F(x) = -x^2 \cdot cos\ x + 2x \cdot sen\ x + 2cos\ x - 1$.

35 **Determina la función $f(x)$ sabiendo que:**

$$f''(x) = x\ ln\ x,\ f'(1) = 0 \ \text{ y } \ f(e) = \frac{e}{4}$$

$f'(x) = \int f''(x)\ dx \ \rightarrow\ f'(x) = \int x\ ln\ x\ dx$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = ln\ x \ \rightarrow\ du = \dfrac{1}{x}\ dx \\ dv = x\ dx \ \rightarrow\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2}\ ln\ x - \int \frac{x}{2}\ dx = \frac{x^2}{2}\ ln\ x - \frac{x^2}{4} + k = \frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + k$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + k = -\frac{1}{4} + k = 0 \ \rightarrow\ k = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \int f'(x)\ dx \ \rightarrow\ f(x) = \int\left[\frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right] dx = \underbrace{\int \frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) dx}_{I} + \frac{1}{4}x$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \left(ln\ x - \dfrac{1}{2}\right) \ \rightarrow\ du = \dfrac{1}{x}\ dx \\ dv = \dfrac{x^2}{2}\ dx \ \rightarrow\ v = \dfrac{x^3}{6} \end{cases}$$

$$I = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \int \frac{x^2}{6}\ dx = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + k$$

Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4}x + k \\ & f(e) = \frac{e^3}{12} - \frac{e^3}{18} + \frac{e}{4} + k = \frac{e^3}{36} + \frac{e}{4} + k = \frac{e}{4} \ \rightarrow\ k = -\frac{e^3}{36} \end{aligned}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4}x - \frac{e^3}{36}$$

36 **Calcula la expresión de una función $f(x)$ tal que:**

$$f'(x) = x\,e^{-x^2} \text{ y } f(0) = \frac{1}{2}$$

$f(x) = \int x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2} + k$

$f(0) = -\frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; k = 1$

Por tanto: $f(x) = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2} + 1$

37 **De una función $y = f(x)$, $x > -1$, sabemos que tiene por derivada $y' = \frac{a}{1+x}$, donde a es una constante.**

Determina la función si, además, sabemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

$y = \int \frac{a}{1+x}\,dx \;\rightarrow\; f(x) = a\,ln\,(1+x) + k \quad (x > -1)$

$f(0) = 1 \;\rightarrow\; a\,ln\,(1+0) + k = 1 \;\rightarrow\; k = 1$

$f(1) = -1 \;\rightarrow\; a\,ln\,2 + k = -1 \;\rightarrow\; a\,ln\,2 = -1-1 \;\rightarrow\; a = \frac{-2}{ln\,2}$

Por tanto, $f(x) = \frac{-2}{ln\,2}\,ln\,(1+x) + 1, \quad x > -1.$

38 **Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ln\,(1+x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.**

$\int ln\,(1+x^2)\,dx$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = ln\,(1+x^2) \;\rightarrow\; du = \dfrac{2x}{1+x^2}\,dx \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$\int ln\,(1+x^2)\,dx = x\,ln\,(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\,ln\,(1+x^2) - 2\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$

$= x\,ln\,(1+x^2) - 2(x - arc\,tg\,x) + k$

$F(x) = x\,ln\,(1+x^2) - 2x + 2arc\,tg\,x + k$

Debe pasar por $(0, 0) \;\rightarrow\; F(0) = 0$

$F(0) = 0 - 2 \cdot 0 + 0 + k = 0 \;\rightarrow\; k = 0$

Así, $F(x) = x\,ln\,(1+x^2) - 2x + 2arc\,tg\,x.$

39 **Calcula el valor del parámetro a para que una primitiva de la función:**

$$\int (ax^2 + x\cos x + 1)\,dx$$

pase por $(\pi, -1)$.

$I = \int (ax^2 + x\cos x + 1)\,dx = \int (ax^2 + 1)\,dx + \int x\cos x\,dx = \frac{ax^3}{3} + x + \underbrace{\int x\cos x\,dx}_{I_1}$

Calculamos I_1 por partes:

$$\begin{cases} u = x \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = \cos x\,dx \;\rightarrow\; v = sen\,x \end{cases}$$

$I_1 = x\,sen\,x - \int sen\,x\,dx = x\,sen\,x + \cos x + k$

$F(x) = \frac{ax^3}{3} + x + x\ sen\ x + cos\ x$

Como pasa por $(\pi, -1)$:

$F(\pi) = -1 \;\to\; \frac{a\pi^3}{3} + \pi + \cancel{\pi \cdot sen}\ \pi + cos\ \pi = -1$

$\frac{a\pi^3}{3} + \pi - 1 = -1 \;\to\; \frac{a\pi^3}{3} = -\pi \;\to\; a = \frac{-3\pi}{\pi^3} = \frac{-3}{\pi^2}$

Así, $F(x) = \frac{-3}{\pi^2} \cdot \frac{x^3}{3} + x + x\ sen\ x + cos\ x = -\frac{x^3}{\pi^2} + x + x\ sen\ x + cos\ x$

40 **Halla $\int e^{ax}(x^2 + bx + c)\,dx$ en función de los parámetros a, b y c.**

$I = \int e^{ax}(x^2 + bx + c)\,dx$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 + bx + c \;\to\; du = (2x + b)\,dx \\ dv = e^{ax}\,dx \;\to\; v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{cases}$$

Así:

$I = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a}\int \underbrace{e^{ax}(2x + b)}_{I_1}\,dx$

Volvemos a integrar por partes:

$$\begin{cases} u = 2x + b \;\to\; du = 2dx \\ dv = e^{ax}\,dx \;\to\; v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{cases}$$

$I = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a}I_1 = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax}(2x + b) - \frac{1}{a}\int e^{ax}\,2\,dx\right] =$

$= \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a^2}e^{ax}(2x + b) + \frac{2}{a^3}e^{ax} + k$

41 **Encuentra la función derivable $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ que cumple $f(1) = -1$ y tal que:**

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

- Si $x \ne 0$:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx \begin{cases} \int (x^2 - 2x)\,dx & \text{si } -1 \le x < 0 \\ \int (e^x - 1)\,dx & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + k & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x + c & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

- Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(1) = -1$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 0$.

$f(1) = -1 \;\to\; e - 1 + c = -1 \;\to\; c = -e$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = k \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 - e \end{array}\right\} k = 1 - e$$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x - e & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

42 **De una función derivable se sabe que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \le 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

a) Si $x \ne 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ \ln x + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(-1) = -4$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 1$:

$$f(-1) = -\frac{5}{2} + k = -4 \;\rightarrow\; k = -\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = c \end{array}\right\} c = 0$$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $f(2) = \ln 2$; $f'(2) = \dfrac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente será: $y = \ln 2 + \dfrac{1}{2}(x - 2)$

43 **Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 3x^2 - 6x$ tal que $F(x)$ tenga un mínimo en el punto (2, 0).**

Determina los demás puntos singulares de $F(x)$.

$$F(x) = \int (3x^2 - 6x)\, dx = x^3 - 3x^2 + k$$

La función pasa por el punto (2, 0) por ser un mínimo.

$F(2) = 0 \;\rightarrow\; -4 + k = 0 \;\rightarrow\; k = 4$

Así: $F(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Calculamos los demás puntos singulares:

$F'(x) = f(x) = 3x^2 - 6x$

$F'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 2$

$F''(x) = 6x - 6$

$F''(0) < 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; y = 4 \;\rightarrow$ El punto (0, 4) es un máximo relativo.

$F''(2) > 0 \;\rightarrow$ Efectivamente, el punto (2, 0) es un mínimo relativo.

44 **Halla la función $f(x)$ de la que conocemos $f''(x) = e^x$, $f'(1) = 0$ y $f(0) = 1$.**

$$f''(x) = e^x \;\rightarrow\; f'(x) = \int x^x\, dx = e^x + c_1$$

$$f'(1) = 0 = e^1 + c_1 \;\rightarrow\; c_1 = -e$$

$$f'(x) = e^x - e \;\rightarrow\; f(x) = \int (e^x - e)\, dx = e^x - xe + c_2$$

$$f(0) = 1 = e^0 - 0e + c_2 \;\rightarrow\; c_2 = 0$$

$$f(x) = e^x - xe$$

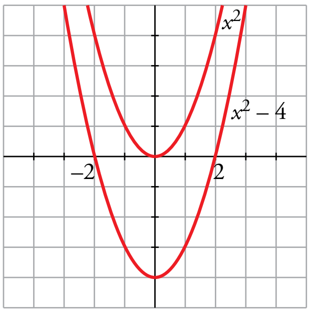
45 **Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x$ tal que $F(x) \le 0$ en el intervalo [–2, 2].**

$F(x) = \int 2x\, dx = x + k$

$x^2 + k \le 0$ en $[-2, 2]$

Debe ser $k \le -4$; por ejemplo, la función $F(x) = x^2 - 4$ es menor o igual que 0 en $[-2, 2]$.

Representamos x^2 y $x^2 - 4$:



46 **Halla $f(x)$ sabiendo que:**

$$f''(x) = \cos\frac{x}{2},\ f'(2\pi) = 0 \text{ y } f(0) = 1$$

$f'(x) = \int f''(x)\, dx = \int \cos\frac{x}{2}\, dx = 2\int \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\, dx = 2\,\text{sen}\,\frac{x}{2} + k$

$f'(x) = 2\,\text{sen}\,\frac{x}{2} + k$; como $f'(2\pi) = 0 \to 2\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{2} + k = 0 \to k = 0$

$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int 2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\, dx = 2 \cdot 2\int \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\, dx = 4\left(-\cos\frac{x}{2}\right) + k'$

$f(x) = -4\cos\frac{x}{2} + k'$; como $f(0) = 1 \to f(0) = -4\cos 0 + k' = 1 \to -4 + k' = 1 \to k' = 5$

Por tanto, la función que buscamos es $f(x) = -4\cos\frac{x}{2} + 5$

47 **a) Halla la familia de curvas en las que la pendiente de las rectas tangentes a dichas curvas en cualquiera de sus puntos viene dada por la función:**

$$f(x) = \frac{x-2}{2x+4}$$

b) Determina cuál es la curva de esta familia que pasa por el punto $A\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

a) La pendiente de la recta tangente a la curva en uno de sus puntos viene dada por la derivada de la curva en ese punto.

Por tanto, $m = F'(x) = \frac{x-2}{2x+4}$.

Buscamos $F(x) = \int \frac{x-2}{2x+4}\, dx$.

$F(x) = \int \frac{x-2}{2x+4}\, dx = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2x+4}\right) dx = \frac{1}{2}x - 2\int \frac{2}{2x+4}\, dx = \frac{x}{2} - 2\ln|2x+4| + k$

b) Debe ser:

$F\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \to \frac{-5/2}{2} - 2\ln\left|2\left(-\frac{5}{2}\right) + 4\right| + k = \frac{3}{4} \to \frac{-5}{4} - 2\ln 1 + k = \frac{3}{4} \to$

$\to k = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2 \to F(x) = \frac{x}{2} - 2\ln|2x+4| + 2$

Página 353

48 **Calcula la función $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = x$, que la gráfica de f pasa por el punto $P(1, 1)$ y que la tangente en P es paralela a la recta de ecuación:**

$$3x + 3y - 1 = 0$$

$f'(x) = \int f''(x)\,dx \to f'(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + k$

$f(x) = \int f'(x)\,dx \to \int\left(\frac{x^2}{2} + k\right)dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + kx + k'$

f pasa por $P(1, 1) \to f(1) = 1 \to \frac{1}{6} + k + k' = 1 \quad (1)$

La pendiente de la recta tangente en P es $m = -1$; por ello:

$f'(1) = -1 \to \frac{1}{2} + k = -1 \quad (2)$

De las igualdades (1) y (2) obtenemos los valores de k y k':

$k = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$; $k' = 1 - \frac{1}{6} - k = 1 - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{7}{3}$

Por tanto, la función que buscamos es: $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}$

49 **Halla la función $F(x)$ tal que $F(0) = 2$ y que sea primitiva de la función siguiente:**

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$F(x) = \int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx = ln\,(e^x + 1) + k$

$F(0) = 2 \to ln\,2 + k = 2 \to k = 2 - ln\,2$

Por tanto:

$F(x) = ln\,(e^x + 1) + 2 - ln\,2$

50 **Halla la ecuación de una curva $y = f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $P(1, 1)$ y que la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera es $3x + 1$.**

Como la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera es $3x + 1$, se cumple que:

$f'(x) = 3x + 1$

$f(x) = \int (3x + 1)\,dx = \frac{3x^2}{2} + x + k$

Por otra parte:

$f(1) = 1 \to \frac{3}{2} + 1 + k = 1 \to k = -\frac{3}{2}$

Por tanto:

$f(x) = \frac{3x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$

51 **Dadas las funciones:**

$$f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5 \qquad g(x) = 6x^2 - 7x + 2$$

halla la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ que cumple la igualdad $H(1) = 1$.

$H(x) = \int \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}\,dx = \int\left(2x + 1 + \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2}\right)dx = \int (2x + 1)\,dx + \int \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2}\,dx =$

$= x^2 + x + ln\,|6x^2 - 7x + 2| + k$

$H(1) = 1 \to 2 + k = 1 \to k = -1$

Por tanto:

$H(x) = x^2 + x + ln\,|6x^2 - 7x + 2| - 1$

52 **Calcula** $\int \frac{1}{sen^2 x \cos^2 x} dx$.

* ***Utiliza la igualdad*** $sen^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\int \frac{1}{sen^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{sen^2 x}{sen^2 x \cdot \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{sen^2 x \cdot \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{sen^2 x} dx = tg\, x - cotg\, x + k$$

53 **Resuelve:**

a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-9x^6}} dx$

b) $\int \sqrt{81-25x^2}\, dx$

* ***a) Haz*** $t = 3x^3$. ***b) Haz*** $x = \frac{9}{5} sen\, t$.

a) Hacemos $t = 3x^3 \to dt = 9x^2\, dx \to \frac{1}{9} dt = x^2\, dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-9x^6}} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{9} arc\ sen\, t + k = \frac{1}{9} arc\ sen\, 3x^3 + k$$

b) Hacemos $x = \frac{9}{5} sen\, t \to dx = \frac{9}{5} \cos t\, dt \quad \left(t = arc\ sen \frac{5x}{9}\right)$

$$\int \sqrt{81-25x^2}\, dx = \int \sqrt{81 - 25\left(\frac{9}{5} sen\, t\right)^2}\, \frac{9}{5} \cos t\, dt = \int \sqrt{81 - 81\, sen^2 t}\, \frac{9}{5} \cos t\, dt =$$

$$= \frac{81}{5} \int \sqrt{1 - sen^2 t}\, \cos t\, dt = \frac{81}{5} \int \cos^2 t\, dt = \frac{81}{5} \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{81}{10} t + \frac{81}{20} sen\, 2t + k = \frac{81}{10} arc\ sen \frac{5x}{9} + \frac{81}{20} sen\left(2\, arc\ sen \frac{5x}{9}\right) + k$$

54 **Calcula:**

a) $\int |1-x|\, dx$

b) $\int (3+|x|)\, dx$

c) $\int |2x-1|\, dx$

d) $\int \left|\frac{2x}{3} - 4\right| dx$

e) $\int |x-2|\, x\, dx$

f) $\int e^{|x|}\, dx$

a) $\int |1-x|\, dx$

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1 \\ -1+x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |1-x|\, dx = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ -x + \frac{x^2}{2} + c & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

En $x = 1$, la función ha de ser continua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2} + k \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\frac{1}{2} + c \end{array}\right\} \quad \frac{1}{2} + k = -\frac{1}{2} + c \to c = 1 + k$$

Por tanto:

$$\int |1-x|\, dx = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ -x + \frac{x^2}{2} + 1 + k & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

b) $\int (3 + |x|)\, dx$

$$3 + |x| = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ 3 + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \int (3 + |x|)\, dx = \begin{cases} 3x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 0 \\ 3x + \dfrac{x^2}{2} + c & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

En $x = 0$, la función ha de ser continua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = c \end{array}\right\} \ c = k$$

Por tanto:

$$\int (3 + |x|)\, dx = \begin{cases} 3x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 0 \\ 3x + \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

c) $\int |2x - 1|\, dx$

$$|2x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \ge 1/2 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |2x - 1|\, dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x + c & \text{si } x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$f(x)$ ha de ser continua en $x = \dfrac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to (1/2)^-} f(x) = \dfrac{1}{4} + k \\ \lim\limits_{x \to (1/2)^+} f(x) = -\dfrac{1}{4} + c \end{array}\right\} \ \frac{1}{4} + k = -\frac{1}{4} + c \ \to \ c = \frac{1}{2} + k$$

Por tanto:

$$\int |2x - 1|\, dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x + \dfrac{1}{2} + k & \text{si } x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

d) $\int \left| \dfrac{2x}{3} - 4 \right| dx$

Expresamos $f(x)$ por intervalos.

$$\frac{2x}{3} - 4 = 0 \ \to \ x = 6$$

$$\left| \frac{2x}{3} - 4 \right| dx = \begin{cases} -\dfrac{2x}{3} + 4 & \text{si } x < 6 \\ \dfrac{2x}{3} - 4 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$$

Hallamos las primitivas por tramos:

$$\int \left(-\frac{2x}{3} + 4 \right) dx = -\frac{x^2}{3} + 4x + k_1$$

$$\int \left(\frac{2x}{3} - 4 \right) dx = \frac{x^2}{3} - 4x + k_2$$

$$F(x) = \int\left|\frac{2x}{3} - 4\right| dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{3} + 4x + k_1 & \text{si } x < 6 \\ \dfrac{x^2}{3} - 4x + k_2 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 6$.

$$F(6) = \frac{6^2}{3} - 4 \cdot 6 + k_2 = -12 + k_2$$

$$\lim_{x \to 6} F(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 6^-}\left(-\dfrac{x^2}{3} + 4x + k_1\right) = 12 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 6^+}\left(\dfrac{x^2}{3} - 4x + k_2\right) = -12 + k_2 \end{cases} \to 12 + k_1 = -12 + k_2 \to k_2 = 24 + k_1$$

Por tanto:

$$\int\left|\frac{2x}{3} - 4\right| dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{3} + 4x + k & \text{si } x < 6 \\ \dfrac{x^2}{3} - 4x + 24 + k & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

e) $\int |x - 2|\, x\, dx$

$$|x - 2|x = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Hallamos las primitivas por tramos:

$$\int (-x^2 + 2x)\, dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + k_1$$

$$\int (x^2 - 2x)\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + k_2$$

$$F(x) = \int |x - 2|\, x\, dx = \begin{cases} -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + k_1 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x^3}{3} - x^2 + k_2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 2$.

$$F(2) = \frac{2^3}{3} - 4 + k_2 = -\frac{4}{3} + k_2$$

$$\lim_{x \to 2} F(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-}\left(-\dfrac{x^3}{3} + x^2 + k_1\right) = \dfrac{4}{3} + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+}\left(\dfrac{x^3}{3} - x^2 + k_2\right) = -\dfrac{4}{3} + k_2 \end{cases} \to \frac{4}{3} + k_1 = -\frac{4}{3} + k_2 \to k_2 = \frac{8}{3} + k_1$$

Por tanto:

$$\int |x - 2|\, x\, dx = \begin{cases} -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + k & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \dfrac{8}{3} + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

f) $\int e^{|x|}\, dx$

$$e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int e^{|x|}\, dx = \begin{cases} -e^{-x} + k_1 & \text{si } x < 0 \\ e^{x} + k_2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 0$.

$F(0) = 1 + k_2$

$$\lim_{x \to 0} F(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} (-e^{-x} + k_1) = -1 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (e^{x} + k_2) = 1 + k_2 \end{cases} \rightarrow -1 + k_1 = 1 + k_2 \rightarrow k_2 = -2 + k_1$$

Por tanto:

$$\int e^{|x|}\, dx = \begin{cases} -e^{-x} + k & \text{si } x < 0 \\ e^{x} - 2 + k & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

55 **Determina una función $f(x)$ que verifique la ecuación siguiente:**

$$x^3 f'(x) + x^2 + 2x = 3$$

$$x^3 \cdot f'(x) + x^2 + 2x = 3 \rightarrow x^3 \cdot f'(x) = 3 - x^2 - 2x \rightarrow f'(x) = \frac{3 - x^2 - 2x}{x^3} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \int\left(\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = 3\int\frac{dx}{x^3} - 2\int\frac{dx}{x^2} - \int\frac{dx}{x} = -\frac{3}{2x^2} + \frac{2}{x} - \ln x + k$$

56 **De una función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que pasa por el punto $(-1, 0)$ y que su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

a) $f(x) = \int f'(x)\, dx = \begin{cases} e^{-x} + k_1 & \text{si } x < 0 \\ -x + k_2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Como la función es derivable, debe ser continua en $x = 0$.

$f(0) = k_2$

$$\lim_{x \to 0} F(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} (-e^{-x} + k_1) = 1 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (-x + k_2) = k_2 \end{cases} \rightarrow 1 + k_1 = k_2$$

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + k & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 + k & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Como pasa por el punto $(-1, 0) \rightarrow f(-1) = 0 \rightarrow e + k = 0 \rightarrow k = -e$

La expresión de la función buscada es:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - e & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 - e & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

b) $x = 1$, $f(1) = -e$, $f'(1) = -1$

La ecuación de la recta tangente es: $y = -e - (x - 1)$.

57 **Determina una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que la derivada segunda es constante e igual a 3 y que la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$, es $5x - y - 3 = 0$.**

$$f''(x) = 3 \rightarrow f'(x) = \int 3\, dx = 3x + k_1$$

Recta tangente en $x = 1$:

$$y = 5x - 3 \rightarrow \begin{cases} f'(1) = 5 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$f'(1) = 5 \rightarrow 3 + k_1 = 5 \rightarrow k_1 = 2$

Luego:

$$f'(x) = 3x + 2$$

$$f(x) = \int (3x + 2)\, dx = \frac{3x^2}{2} + 2x + k_2$$

$$f(1) = 2 \rightarrow \frac{3}{2} + 2 + k_2 = 2 \rightarrow k_2 = -\frac{3}{2}$$

La función es:

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$$

58 **Calcula una primitiva de la función $f(x) = 1/x$ que no tome ningún valor positivo en el intervalo $[1, e]$.**

$$F(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = ln\,|x| + k$$

Queremos que $ln\,|x| + k \le 0$ cuando $x \in [1, e]$.

Como $F(x)$ es creciente en dicho intervalo por ser su primera derivada positiva, basta que:

$$ln\, e + k \le 0 \rightarrow k \le -1$$

Por tanto, cualquier valor de k que satisfaga la condición anterior da lugar a una primitiva que resuelve el problema. Por ejemplo, $F(x) = ln\,|x| - 1$.

59 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$ **d)** $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}\, dx$

a) Para eliminar la raíz hacemos $x + 2 = t^2 \rightarrow dx = 2t\, dt \quad (x = t^2 - 2)$

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\, dx = \int \frac{t^2+1}{t}\, 2t\, dt = \int (2t^2 + 2)\, dt = \frac{2t^3}{3} + 2t + k = \frac{2\sqrt{(x+2)^3}}{3} + 2\sqrt{x+2} + k$$

b) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^2 \rightarrow dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int \frac{2t\, dt}{(t^2+1)\, t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\, arc\, tg\, t + k = 2\, arc\, tg\, \sqrt{x} + k$$

c) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^6 \rightarrow dx = 6t^5\, dt$

$$\int \sqrt{x}\,(1 + \sqrt[3]{x^2})\, dx = \int \sqrt{t^6}\,(1 + \sqrt[3]{(t^6)^2})\, 6t^5\, dt = \int t^3\,(1 + t^4)\, 6t^5\, dt =$$

$$= 6\int (t^8 + t^{12})\, dt = \frac{2t^9}{3} + \frac{6t^{13}}{13} + k = \frac{2\sqrt[6]{x^9}}{3} + \frac{6\sqrt[6]{x^{13}}}{13} + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{6\sqrt[6]{x^{23}}}{13} + k$$

d) Para eliminar la raíz hacemos $x + 1 = t^2 \rightarrow dx = 2t\, dt \quad (x = t^2 - 1)$

$$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx = \int (t^2-1)^2\, t \cdot 2t\, dt = 2\int t^2\,(t^2-1)^2\, dt = 2\int (t^6 - 2t^4 + t^2)\, dt =$$

$$= \frac{2t^7}{7} - \frac{4t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + k = \frac{2\sqrt{(x+1)^7}}{7} - \frac{4\sqrt{(x+1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + k$$

60 **a) Para resolver la siguiente integral, multiplica numerador y denominador por *cos x* y haz después un cambio de variable:**

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

b) Utiliza el procedimiento anterior para resolver las integrales siguientes:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} \qquad \int \frac{dx}{\text{sen } x}$$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{1 - \text{sen}^2 x}$

Hacemos $u = \text{sen } x \to du = \cos x\, dx$

$$\int \frac{\cos x}{1 - \text{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{1}{1 - u^2}\, du \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u} = \frac{1}{2} \ln|1+u| - \frac{1}{2} \ln|1-u| + k =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1 + \text{sen } x| - \frac{1}{2} \ln|1 - \text{sen } x| + k$$

(∗) Se ha resuelto descomponiendo en fracciones simples.

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{(1 - \text{sen}^2 x)^2}$

Hacemos $u = \text{sen } x \to du = \cos x\, dx$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{(1 - \text{sen}^2 x)^2} = \int \frac{du}{(1-u^2)^2} = \int \frac{du}{(1+u)^2(1-u)^2} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{(1+u)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{1-u} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{(1-u)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|1+u| - \frac{1}{4(1+u)} - \frac{1}{4} \ln|1-u| + \frac{1}{4(1-u)} + k =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|1 + \text{sen } x| - \frac{1}{4(1 + \text{sen } x)} - \frac{1}{4} \ln|1 - \text{sen } x| + \frac{1}{4(1 - \text{sen } x)} + k$$

(∗) Se ha resuelto descomponiendo en fracciones simples.

$I = \displaystyle\int \frac{dx}{\text{sen } x} = \int \frac{\text{sen } x\, dx}{\text{sen}^2 x} = \int \frac{\text{sen } x\, dx}{1 - \cos^2 x}$

Hacemos $u = \cos x \to du = -\text{sen } x\, dx \to -du = \text{sen } x\, dx$

$$I = \int \frac{\text{sen } x\, dx}{1 - \cos^2 x} = -\int \frac{du}{1-u^2} \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2} \ln|1+u| + \frac{1}{2} \ln|1-u| + k = -\frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) + \frac{1}{2} \ln(1 - \cos x) + k$$

(∗) Esta integral está resuelta en el primer apartado.

61 **Sean *a* y *b* dos números reales cualesquiera. Calcula la siguiente integral indefinida. Ten en cuenta los casos *a* = 0 o *b* = 0.**

$$\int \frac{\cos x}{(a + b\,\text{sen } x)^2}\, dx$$

Si $a = 0$ y $b = 0$ el problema no tiene sentido. Por tanto, al menos uno de ellos debe ser no nulo.

Si $b = 0 \to a \neq 0$:

$$\int \frac{\cos x}{a^2}\, dx = \frac{\text{sen } x}{a^2} + k$$

Si $b \neq 0$:

$$\int \frac{\cos x}{(a + b\,\text{sen } x)^2}\, dx = \frac{1}{b}\int \frac{b \cos x}{(a + b\,\text{sen } x)^2}\, dx = -\frac{1}{b}\,\frac{1}{a + b\,\text{sen } x} + k = -\frac{1}{b(a + b\,\text{sen } x)} + k$$

ya que $D[a + b\,\text{sen } x] = b \cos x$.

62 **Dada $f(x) = sen\ x - sen^3\ x$, halla:**

a) Su integral indefinida.

b) La primitiva que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

a) $\int (sen\ x - sen^3\ x)\ dx = \int (1 - sen^2\ x)\ sen\ x\ dx = \int cos^2\ x \cdot sen\ x\ dx = -\int cos^2\ x\ (-sen\ x)\ dx = -\frac{cos^3\ x}{3} + k$

b) Sea $F(x) = -\frac{cos^3\ x}{3} + k$ la primitiva buscada.

Pasa por: $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right) \to F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \to -\frac{cos^3 \frac{\pi}{3}}{3} + k = 1 \to k = \frac{25}{24}$

Luego: $F(x) = -\frac{cos^2\ x}{3} + \frac{25}{24}$

63 **Calcula $f(x)$ sabiendo que su derivada $f'(x) = 3 - 2sen\ x$ corta a la bisectriz del primer cuadrante en el punto $x = \pi$.**

$f(x) = \int (3 - 2sen\ x)\ dx = 3x + 2cos\ x + k$

Corta a la bisectriz del primer cuadrante en el punto $x = \pi \to$ pasa por (π, π).

$f(\pi) = \pi \to 3\pi + 2cos\ \pi + k = \pi \to k = 2 - 2\pi$

La función es: $f(x) = 3x + 2cos\ x + 2 - 2\pi$

64 **Calcula la siguiente primitiva, en la que suponemos que $a \neq 1$:**

$$\int \frac{dx}{x^2 - (a+1)x + a}$$

El polinomio $P(x) = x^2 - (a + 1)x + a$ tiene raíces $x = 1$ y $x = a$, ya que $P(1) = P(a) = 0$. Vamos a distinguir dos casos:

- $a \neq 1 \to$ Las raíces reales son distintas:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - (a+1)\,x + a} = \int \frac{dx}{(x-1)\,(x-a)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)\,(x-a)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-a} \to 1 = A(x-a) + B(x-1)$$

$$x = 1 \to 1 = A(1-a) \to A = \frac{1}{1-a}$$

$$x = a \to 1 = B(a-1) \to B = \frac{1}{a-1}$$

$$I = \frac{1}{1-a}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{a-1}\int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{1-a}\ ln|x-1| + \frac{1}{a-1}\ ln|x-a| + k$$

- $a = 1 \to$ Tiene una raíz doble:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} = \int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + k$$

65 **Determina una función $f(x)$ de la que sabemos que $f''(x) = -sen\ x$ y que la recta $x + y - 2 - \pi = 0$ es tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = \pi$.**

$y = -x + 2 + \pi$ es la recta tangente en $x = \pi \to \begin{cases} f'(\pi) = -1 \\ f(\pi) = 2 \end{cases}$

$f'(x) = \int (-sen\ x)\ dx = cos\ x + k_1$

$f'(\pi) = -1 \to cos\ \pi + k_1 = -1 \to k_1 = 0$

Luego: $f'(x) = cos\ x$

$$f(x) = \int cos\ x\ dx = sen\ x + k_2$$

$$f(\pi) = 2 \rightarrow sen\ \pi + k_2 = 2 \rightarrow k_2 = 2$$

Por tanto: $f(x) = sen\ x + 2$

66 **Calcula** $\int 3x\,|x-2|\,dx$**.**

$$3x|x-2| = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 2 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Hallamos las primitivas por tramos.

$$\int (-3x^2 + 6x)\,dx = -x^3 + 3x^2 + k_1 \qquad \int (3x^2 - 6x)\,dx = x^3 - 3x^2 + k_2$$

$$F(x) = \int 3x|x-2|\,dx = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 + k_1 & \text{si } x < 2 \\ x^3 - 3x^2 + k_2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 2$.

$$F(2) = -4 + k_2$$

$$\lim_{x \to 2} F(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (-x^3 + 3x^2 + k_1) = 4 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x^3 - 3x^2 + k_2) = -4 + k_2 \end{cases} \rightarrow 4 + k_1 = -4 + k_2 \rightarrow k_2 = 8 + k_1$$

Por tanto:

$$\int 3x|x-2|\,dx = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 + k & \text{si } x < 2 \\ x^3 - 3x^2 + 8 + k & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

67 **De una función continua $f(x)$ sabemos que tiene un mínimo en (–1, –2) y que su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión analítica de $f(x)$.

b) Escribe la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

a) Integrando por tramos obtenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + k_1 & \text{si } x \le 1 \\ 4x + k_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como la función es continua en $\mathbb{R}$, lo es en $x = 1$.

$$f(1) = 3 + k_1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 2x + k_1) = 3 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (4x + k_2) = 4 + k_2 \end{cases} \rightarrow 3 + k_1 = 4 + k_2 \rightarrow k_2 = -1 + k_1$$

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + k & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 1 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como tiene un mínimo en (–1, –2), pasa por ese punto.

$$f(-1) = -2 \rightarrow -1 + \text{k} = -2 \rightarrow k = -1$$

La expresión final de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) $x = 1$, $f(1) = 2$, $f'(1) = 4 \rightarrow$ La recta tangente es: $y = 2 + 4(x - 1)$

Página 354

Cuestiones teóricas

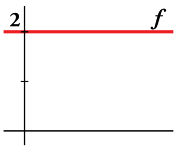
68 Prueba que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C un número real cualquiera, la función $F(x) + C$ es también una primitiva de $f(x)$.

$F(x)$ primitiva de $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

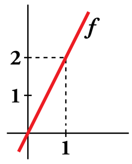
$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) + C$ es primitiva de $f(x)$.

69 Representa tres primitivas de las siguientes funciones f:

a)



b)



a) $f(x) = 2 \rightarrow F(x) = 2x + k$

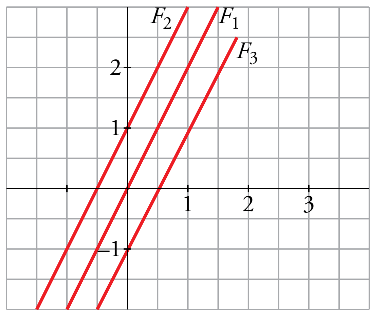
Por ejemplo:

$F_1(x) = 2x$

$F_2(x) = 2x + 1$

$F_3(x) = 2x - 1$

cuyas gráficas son:



b) $f(x) = 2x \rightarrow F(x) = x^2 + k$

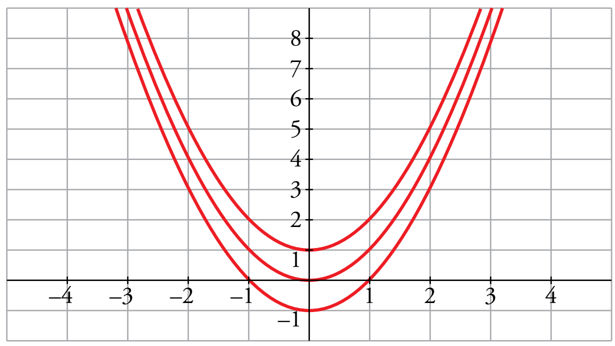
Por ejemplo:

$F_1(x) = x^2$

$F_2(x) = x^2 + 1$

$F_3(x) = x^2 - 1$

cuyas gráficas son:



70 En una integral hacemos el cambio $t = tg\,x$. ¿Cuál es la expresión de dx en función de t?

$t = tg\,x \rightarrow dt = (1 + tg^2\,x)\,dx \rightarrow dt = (1 + t^2)\,dx \rightarrow dx = \dfrac{dt}{1 + t^2}$

71 Comprueba que $\displaystyle\int \frac{1}{cos\,x}\,dx = ln\,|sec\,x + tg\,x| + k$.

Tenemos que probar que la derivada de $f(x) = ln\,|sec\,x + tg\,x| + k$ es $f'(x) = \dfrac{1}{cos\,x}$.

Derivamos $f(x) = ln\left|\dfrac{1 + sen\,x}{cos\,x}\right| + k$:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{cos^2 x + sen\,x\,(1 + sen\,x)}{cos^2 x}}{\dfrac{1 + sen\,x}{cos\,x}} = \frac{\dfrac{cos^2 x + sen\,x + sen^2 x}{cos\,x}}{1 + sen\,x} = \frac{1 + sen\,x}{(1 + sen\,x)\,cos\,x} = \frac{1}{cos\,x}$$

72 **Calcula $f(x)$ sabiendo que $\int f(x)\,dx = ln\,|tg\,x| + k$.**

Debemos suponer que $x \neq k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$ para que tenga sentido la función y se pueda evaluar la tangente.

- Si $tg\,x > 0 \;\to\; f'(x) = D[ln\,(tg\,x) + k] = \dfrac{1 + tg^2\,x}{tg\,x}$
- Si $tg\,x < 0 \;\to\; f'(x) = D[ln\,(-tg\,x) + k] = \dfrac{-1 - tg^2\,x}{-tg\,x} = \dfrac{1 + tg^2\,x}{tg\,x}$

73 **Las integrales $\int \dfrac{(arc\,tg\,x)^2}{1+x^2}\,dx$ y $\int (tg^3\,x + tg^5\,x)\,dx$, ¿son del tipo $\int f(x)^n f'(x)\,dx$? En caso afirmativo, identifica, en cada una de ellas, $f(x)$, n y $f'(x)$.**

Ambas son del tipo $\int f(x)^n f'(x)\,dx$.

- $\displaystyle\int \frac{(arc\,tg\,x)^2}{1+x^2}\,dx = \int (arc\,tg\,x)^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$

  $f(x) = arc\,tg\,x;\;\; n = 2;\;\; f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

- $\displaystyle\int (tg^3\,x + tg^5\,x)\,dx = \int tg^3\,x\,(1 + tg^2\,x)\,dx$

  $f(x) = tg\,x;\;\; n = 3;\;\; f'(x) = 1 + tg^2\,x$

74 **Sin utilizar el cálculo de derivadas, prueba que:**

$$F(x) = \frac{1}{1+x^4} \quad \text{y} \quad G(x) = \frac{-x^4}{1+x^4}$$

son dos primitivas de una misma función.

Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de una misma función, su diferencia es una constante. Veámoslo:

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{1+x^4} - \left(\frac{-x^4}{1+x^4}\right) = \frac{1+x^4}{1+x^4} = 1$$

Por tanto, hemos obtenido que: $F(x) = G(x) + 1$

Luego las dos son primitivas de una misma función.

75 **Calcula $f(x)$ sabiendo que $\int f(x)\,dx = ln\,\dfrac{|x-1|^3}{(x+2)^2} + k$.**

$F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = ln\,\frac{|x-1|^3}{(x+2)^2} + c$

Sabemos que $F'(x) = f(x)$.

Por tanto, calculamos la derivada de $F(x)$.

Aplicamos las propiedades de los logaritmos antes de derivar:

$F(x) = 3ln\,|x-1| - 2ln\,(x+2) + c$

$$F'(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2} = \frac{3(x+2) - 2(x-1)}{x^2+x-2} = \frac{x+8}{x^2+x-2}$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{x+8}{x^2+x-2}$.

76 **Sean f y g dos funciones continuas y derivables que se diferencian en una constante. ¿Podemos asegurar que f y g tienen una misma primitiva?**

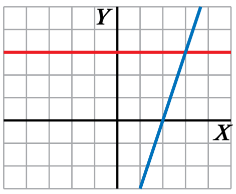
No. Por ejemplo:

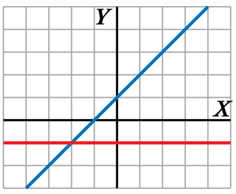
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x + 1 \;\to\; F(x) = x^2 + x + k \\ g(x) = 2x + 2 \;\to\; G(x) = x^2 + 2x + c \end{array}\right\}$$

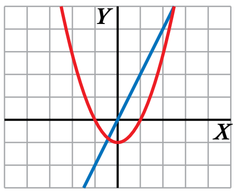
$f(x)$ y $g(x)$ son continuas, derivables y se diferencian en una constante (pues $f(x) = g(x) - 1$).

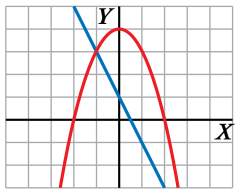
Sin embargo, sus primitivas, $F(x)$ y $G(x)$, respectivamente, son distintas, cualesquiera que sean los valores de k y c.

77 **¿Cuáles de los siguientes apartados representan la gráfica de una función $f(x)$ y la de una de sus primitivas $F(x)$?**

a)


b)


c)


d)


a) Las funciones representadas son:

$$y = 3 \text{ e } y = 3x - 6, \text{ que cumplen: } \int 3\, dx = 3x + k$$

Por tanto, $f(x) = 3$, y $F(x) = 3x - 6$ es una primitiva de f.

b) Las funciones son:

$$y = -1 \text{ e } y = x + 1 \;\to\; \int -1\, dx = -x + k$$

No corresponden a una función y su primitiva.

c) Las funciones son:

$$y = x^2 - 1 \text{ e } y = 2x \;\to\; \int 2x\, dx = x^2 + k$$

Por tanto, $f(x) = 2x$, y una de sus primitivas es $F(x) = x^2 - 1$.

d) Las funciones son:

$$y = -x^2 - 1 + 4 \text{ e } y = -2x + 1 \;\to\; \int -2x + 1\, dx = -x^2 + x + k$$

No corresponden a una función y su primitiva.

78 **Si $\int f(x)\, dx = F(x)$ y $\int g(x)\, dx = G(x)$, halla en función de $F(x)$ y de $G(x)$:**

a) $\int [f(x) - g(x)]\, dx$

b) $\int -\frac{1}{2}[5g(x) + 4f(x)]\, dx$

c) $\int f(2x - 1)\, dx$

d) $\int [5 - g(x)]\, dx$

e) $\int g\left(\frac{x-3}{2}\right) dx$

f) $\int [3f(5x - 1) - 6g(2 - 3x)]\, dx$

g) $\int G'(x)\, g'(x)\, dx$

h) $\int \frac{f'(x)}{F'(x)}\, dx$

a) $\int [f(x) - g(x)]\, dx = F(x) - G(x)$

b) $\int -\frac{1}{2}[5g(x) + 4f(x)]\, dx = -\frac{1}{2}[5G(x) + 4F(x)]$

c) $\int f(2x - 1)\, dx = \frac{1}{2}\int f(2x - 1)\, 2\, dx = \frac{1}{2} F(2x - 1)$

d) $\int [5 - g(x)]\, dx = 5x - G(x)$

e) $\int g\left(\frac{x-3}{2}\right) dx = 2\int g\left(\frac{x-3}{2}\right)\frac{1}{2}\, dx = 2G\left(\frac{x-3}{2}\right)$

f) $\int [3f(5x-1) - 6g(2-3x)]\, dx = 3\int f(5x-1)\, dx - 6\int g(2-3x)\, dx =$

$$= \frac{3}{5}\int f(5x-1)\, 5\, dx + 2\int g(2-3x)(-3)\, dx = \frac{3}{5}F(5x-1) + 2G(2-3x)$$

g) $\int G'(x)\, g'(x)\, dx = \int g(x)\, g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^2}{2} + k = \frac{[G'(x)]^2}{2} + k$

h) $\int \frac{f'(x)}{F'(x)}\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = ln\,|f(x)| + k = ln\,|F'(x)| + k$

79 **¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) Una función logarítmica puede ser una primitiva de una función racional.

b) $\int f(x) \cdot g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$

c) Las primitivas de una función racional irreducible cuyo denominador es de primer grado son un polinomio más un logaritmo neperiano.

a) Verdadero. Por ejemplo, la función logarítmica $F(x) = ln\,(x^2+1)$ es una primitiva de la función racional $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

b) Falso. Tomemos $f(x) = g(x) = x$.

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + k$$

$$\int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx = \int x\, dx \cdot \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + k = \frac{x^4}{4} + k$$

Ambos resultados son claramente distintos.

c) Verdadero. Será de la forma $\frac{p(x)}{x}$ y podemos reescribirlo como $q(x) + \frac{k}{x}$, que tiene como integral un polinomio más un logaritmo neperiano.

80 **Al aplicar el método de integración por partes para calcular $\int f(x)\cos x\, dx$, donde f es una función derivable, se obtiene:**

$$\int f(x)\cos x\, dx = f(x)\, sen\, x - \int \frac{1}{x}\, sen\, x\, dx$$

Encuentra la expresión analítica de $f(x)$ si sabemos que pasa por el punto (1, 2).

Del enunciado del problema se deduce que el método de integración por partes se ha usando de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u = f(x) \ \rightarrow \ du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = \cos x\, dx \ \rightarrow \ v = sen\, x \end{cases}$$

Por tanto:

$$f(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = ln\,|x| + k$$

Por otra parte:

$$f(1) = 2 \ \rightarrow \ k = 2$$

La función es:

$$f(x) = ln\,|x| + 2$$

81 Comprueba que las funciones:

$$F(x) = arc\ tg\ x \quad \text{y} \quad G(x) = -arc\ tg\left(\frac{1}{x}\right)$$

son primitivas de una misma función $f(x)$.

a) ¿Son iguales las funciones F y G?

b) ¿Se cortan sus gráficas?

Para comprobarlo, calculamos sus derivadas.

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$G'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

a) Ambas funciones no son iguales, porque ni siquiera tienen el mismo dominio de definición.

Concretamente, $F(0) = arc\ tg\ 0 = 0$ y $G(0)$ no existe.

b) En el dominio de definición de ambas funciones no pueden cortarse. Como no son iguales y son primitivas de una misma función, difieren en constantes no nulas en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Página 355

Para profundizar

82 Calcula las siguientes integrales trigonométricas mediante un cambio de variable:

a) $\int sen^2\, x\, cos^3\, x\, dx$ **b)** $\int sen^3\, x\, cos^2\, dx$

c) $\int cos^5\, x\, dx$ **d)** $\int cos^3\, x\, sen^3\, x\, dx$

a) Hacemos $u = sen\ x \to du = cos\ x\ dx$

$$\int sen^2\, x \cdot cos^3\, x\, dx = \int sen^2\, x \cdot cos^2\, x \cdot cos\, x\, dx = \int u^2\,(1-u^2)\, du =$$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + k = \frac{sen^3\, x}{3} - \frac{sen^5\, x}{5} + k$$

b) Hacemos $u = cos\ x \to du = -sen\ x\ dx$

$$\int sen^3\, x \cdot cos\, x\, dx = -\int sen^2\, x \cdot cos^2\, x(-sen\, x)\, dx = -\int (1-u^2)\, u^2\, du =$$

$$= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + k = -\frac{cos^3\, x}{3} + \frac{cos^5\, x}{5} + k$$

c) Hacemos $u = sen\ x \to du = cos\ x\ dx$

$$\int cos^5\, x\, dx = \int (cos^2\, x)^2\, cos\, x\, dx = \int (1-u^2)^2\, du = \int (1-2u^2+u^4)\, du =$$

$$= u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + k = sen\, x - \frac{2sen^3\, x}{3} + \frac{sen^5\, x}{5} + k$$

d) $I = \int cos^3\, x \cdot sen^3\, x\, dx = \int cos^2\, x \cdot sen^2\, x \cdot cos\, x \cdot sen\, x\, dx = \int \frac{1+cos\, 2x}{2} \cdot \frac{1-cos\, 2x}{2} \cdot \frac{sen\, 2x}{2}\, dx =$

$$= \frac{1}{8}\int (1-cos^2\, 2x)\, sen\, 2x\, dx$$

Hacemos $u = cos\ 2x \to du = -2sen\ 2x\ dx \to -\frac{du}{2} = sen\ 2x\ dx$

$$I = -\frac{1}{16}\int (1-u^2)\, du = -\frac{u}{16} + \frac{u^3}{48} + k = -\frac{cos\, 2x}{16} + \frac{cos^3\, 2x}{48} + k$$

83 **Calcula:**

a) $\int sen^2 x \, cos^2 x \, dx$ b) $\int sen^6 x \, dx$

* ***Recuerda:*** $1 + cos\, 2x = 2cos^2 x$ ***y*** $1 - cos\, 2x = 2sen^2 x$.

a) $\int sen^2 x \cdot cos^2 x \, dx = \int \frac{1 - cos\, 2x}{2} \cdot \frac{1 + cos\, 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\int (1 - cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4}\int sen^2 2x \, dx \overset{(*)}{=}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1 - cos\, 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\int (1 - cos\, 4x)\, dx = \frac{x}{8} - \frac{sen\, 4x}{32} + k$

(*) Sustituyendo en $1 - cos\, 2x = 2sen^2 x$ la letra x por $2x$ se obtiene $1 - cos\, 4x = 2sen^2 2x$.

b) $I = \int sen^6 x \, dx = \int (sen^2 x)^3 \, dx = \int \left(\frac{1 - cos\, 2x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int (1 - cos\, 2x)^3 \, dx =$

$= \frac{1}{8}\int (1 - 3cos\, 2x + 3cos^2 2x - cos^3 2x)\, dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int cos\, 2x \, dx + \frac{3}{8}\int cos^2 2x \, dx - \frac{1}{8}\int cos^3 2x \, dx$

Calculamos cada integral por separado:

$\int cos\, 2x \, dx = \frac{sen\, 2x}{2} + k$

$\int cos^2 2x \, dx \overset{(*)}{=} \int \frac{1 + cos\, 4x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{sen\, 4x}{8} + k$

(*) Sustituyendo en $1 + cos\, 2x = 2cos^2 x$ la letra x por $2x$ se obtiene $1 + cos\, 4x = 2cos^2 2x$.

$I_1 = \int cos^3 2x \, dx = \int cos^2 2x \cdot cos\, 2x \, dx = \int (1 - sen^2 2x)\, cos\, 2x \, dx$

Hacemos $u = sen\, 2x \rightarrow du = 2cos\, 2x \, dx \rightarrow \frac{du}{2} = cos\, 2x \, dx$

$I_1 = \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\, du = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} + k = \frac{sen\, 2x}{2} - \frac{sen^3 2x}{6} + k$

Ya podemos obtener el resultado final:

$I = \frac{1}{8}x - \frac{3}{16} sen\, 2x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64} sen\, 4x - \frac{1}{16} sen\, 2x + \frac{1}{48} sen^3 2x + k =$

$= \frac{5}{16}x - \frac{1}{4} sen\, 2x + \frac{3}{64} sen\, 4x + \frac{1}{48} sen^3 2x + k$

84 **Para resolver integrales del tipo** $\int \sqrt{a^2 - b^2 x^2}\, dx$ **se utiliza el cambio de variable** $x = \frac{a}{b} sen\, t$.

Calcula las integrales siguientes:

a) $\int \sqrt{100 - 25x^2}\, dx$

b) $\int \sqrt{25 - 64x^2}\, dx$

c) $\int \sqrt{2 - x^2}\, dx$

d) $\int \sqrt{\frac{9}{16} - 25x^2}\, dx$

a) Hacemos $x = 2sen\, t \rightarrow dx = 2cos\, t \, dt$

$\int \sqrt{100 - 25x^2}\, dx = \int \sqrt{100 - 25(2sen\, t)^2}\, 2cos\, t \, dt = \int \sqrt{100 - 100sen^2 t}\, 2cos\, t \, dt =$

$= 20\int \sqrt{1 - sen^2 t} = 20\int cos^2 t \, dt = 20\int \frac{1 + cos\, 2t}{2} dt = 10t + 5sen\, 2t + k =$

$= 10\, arc\, sen\, \frac{x}{2} + 5sen\left(2\, arc\, sen\, \frac{x}{2}\right) + k$

b) Hacemos $x = \frac{5}{8} sen\ t \ \rightarrow \ dx = \frac{5}{8} cos\ t\ dt$

$$\int \sqrt{25-64x^2}\, dx = \int \sqrt{25-64\left(\frac{5}{8} sen\ t\right)^2}\ \frac{5}{8} cos\ t\ dt = \sqrt{25-25sen^2 t}\ \frac{5}{8} cos\ t\ dt =$$

$$= \frac{25}{8}\int \sqrt{1-sen^2 t}\ cos\ t\ dt = \frac{25}{8}\int cos^2 t\ dt = \frac{25}{8}\int \frac{1+cos\ 2t}{2}\ dt =$$

$$= \frac{25}{16}t + \frac{25}{32} sen\ 2t + k = \frac{25}{16} arc\ sen\ \frac{8x}{5} + \frac{25}{32} sen\left(2\ arc\ sen\ \frac{8x}{5}\right) + k$$

c) Hacemos $x = \sqrt{2}\ sen\ t \ \rightarrow \ dx = \sqrt{2}\ cos\ t\ dt$

$$\int \sqrt{2-x^2}\, dx = \sqrt{2-(\sqrt{2}\ sen\ t)^2}\ \sqrt{2}\ cos\ t\ dt = \int \sqrt{2-2sen^2 t}\ \sqrt{2}\ cos\ t\ dt =$$

$$= 2\int \sqrt{1-sen^2 t}\ cos\ t\ dt = 2\int cos^2 t\ dt = 2\int \frac{1+cos\ 2t}{2}\ dt = t + \frac{1}{2} sen\ 2t + k =$$

$$= arc\ sen\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} sen\left(2arc\ sen\ \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + k$$

d) Hacemos $x = \frac{3}{20} sen\ t \ \rightarrow \ dx = \frac{3}{20} cos\ t\ dt$

$$\int \sqrt{\frac{9}{16}-25x^2}\, dx = \int \sqrt{\frac{19}{16}-25\left(\frac{3}{20} sen\ t\right)^2}\ \frac{3}{20} cos\ t\ dt = \int \sqrt{\frac{9}{16}-\frac{9}{16} sen^2 t}\ \frac{3}{20} cos\ t\ dt =$$

$$= \frac{9}{80}\int \sqrt{1-sen^2 t}\ cos\ t\ dt = \frac{9}{80}\int cos^2 t\ dt = \frac{9}{80}\int \frac{1+cos\ 2t}{2}\ dt =$$

$$= \frac{9}{160}t + \frac{9}{320} sen\ 2t + k =$$

$$= \frac{9}{160} arc\ sen\ \frac{20x}{3} + \frac{9}{320} sen\left(2arc\ sen\ \frac{20x}{3}\right) + k$$

85 **Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación en la que, además de x e y, figura también y'. Resolverla es buscar una función $y = f(x)$ que la verifique:**

Por ejemplo, resolvamos $xy^2 + y' = 0$:

$$y' = -xy^2 \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = -xy^2 \ \rightarrow \ dy = -xy^2\, dx$$

Separamos las variables:

$$\frac{dy}{y^2} = -x\, dx \ \rightarrow \ \int \frac{dy}{y^2} = \int (-x)\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} + k \ \rightarrow \ y = \frac{2}{x^2-2k}$$

Hay infinitas soluciones. Busca la que pasa por el punto (0, 2) y comprueba que la curva que obtienes verifica la ecuación propuesta.

- Buscamos la solución que pasa por el punto (0, 2):

$$y = \frac{2}{x^2-2k} \ \rightarrow \ 2 = \frac{2}{-2k} \ \rightarrow \ -4k = 2 \ \rightarrow \ k = \frac{-1}{2}$$

Por tanto, $y = \frac{2}{x^2+1}$

- Comprobamos que verifica la ecuación $xy^2 + y' = 0$:

$$xy^2 + y' = x\left(\frac{2}{x^2+1}\right)^2 - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = x \cdot \frac{4}{(x^2+1)^2} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$$

86 **Resuelve estas ecuaciones diferenciales de primer orden:**

a) $yy' - x = 0$ **b)** $y^2 y' - x^2 = 1$ **c)** $y' - xy = 0$

d) $y' \sqrt{x} - y = 0$ **e)** $y' e^y + 1 = e^x$ **f)** $x^2 y' + y^2 + 1 = 0$

* ***En todas ellas, al despejar y' se obtiene en el segundo miembro el producto o el cociente de dos funciones, cada una de ellas con una sola variable.***

a) $yy' - x = 0$

$$y' = \frac{x}{y} \to \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \to y\,dy = x\,dx \to \int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + k \to y^2 = x^2 + 2k \to y = \pm\sqrt{x^2 + 2k}$$

b) $y^2 y' - x^2 = 1$

$$y' = \frac{1 + x^2}{y^2} \to \frac{dy}{dx} = \frac{1 + x^2}{y^2} \to y^2\,dy = (1 + x^2)\,dx$$

$$\int y^2\,dy = \int (1 + x^2)\,dx \to \frac{y^3}{3} = x + \frac{x^3}{3} + k \to y^3 = 3x + x^3 + 3k \to y = \sqrt[3]{3x + x^3 + 3k}$$

c) $y' - x\,y = 0$

$$y' = xy \to \frac{dy}{dx} = xy \to \frac{dy}{y} = x\,dx \to \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$ln\,|y| = \frac{x^2}{2} + k \to |y| = e^{(x^3/2) + k} \to y = \pm\,e^{(x^2/2) + k}$$

d) $y' \sqrt{x} - y = 0$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}} \to \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} \to \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \to \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$ln\,|y| = 2\sqrt{x} + k \to |y| = e^{2\sqrt{x} + k} \to y = \pm\,e^{2\sqrt{x} + k}$$

e) $y' e^y + 1 = e^x$

$$y' = \frac{e^x - 1}{e^y} \to \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - 1}{e^y}$$

$$e^y\,dy = (e^x - 1)\,dx \to \int e^y\,dy = \int (e^x - 1)\,dx$$

$$e^y = e^x - x + k \to y = ln\,|e^x - x + k|$$

f) $x^2 y' + y^2 + 1 = 0$

$$y' = \frac{-1 - y^2}{x^2} \to \frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + y^2)}{x^2} \to \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{-1}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{-1}{x^2}\,dx \to arc\,tg = \frac{1}{x} + k$$

$$y = tg\left(\frac{1}{x} + k\right)$$

Autoevaluación

Página 355

Resuelve las integrales siguientes:

1 $\int (\cos x + tg\, x)\, dx$

$$\int (\cos x + tg\, x)\, dx = \int \cos x\, dx + \int \frac{sen\, x}{\cos x}\, dx = sen\, x - ln\,|\cos x| + k$$

2 $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx$

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx = 2ln\,|x| + \frac{x^{3/2}}{3/2} = 2ln\,|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$$

3 $\int x\sqrt[3]{2x^2+1}\, dx$

$$\int x\sqrt[3]{2x^2+1}\, dx = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2+1)^{1/3}\, dx = \frac{1}{4}(2x^2+1)^{4/3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}\sqrt[3]{(2x^2+1)^4} + k$$

4 $\int \frac{tg^2\, x}{\cos^2 x}\, dx$

$$\int \frac{tg^2\, x}{\cos^2 x}\, dx = \frac{tg^3\, x}{3} + k$$

5 $\int 2^{sen\, x} \cos x\, dx$

$$\int 2^{sen\, x} \cos x\, dx = \frac{2^{sen\, x}}{ln\, 2} + k, \quad \text{ya que } \; D[sen\, x] = \cos x.$$

6 $\int \frac{1}{x}\, sen\,(ln\, x)\, dx$

$$\int \frac{1}{x}\, sen\,(ln\, x)\, dx = -\cos\,(ln\, x) + k$$

7 $\int \frac{x}{x^2+4x-21}\, dx$

$$I = \int \frac{x}{x^2+4x-21}\, dx$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$x^2 + 4x - 21 = 0 \begin{cases} x = -7 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\frac{x}{(x-3)(x+7)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+7} \;\to\; x = A(x+7) + B(x-3) \;\to\; A = \frac{3}{10},\; B = \frac{7}{10}$$

$$I = \int \frac{3/10}{x-3}\, dx + \int \frac{7/10}{x+7}\, dx = \frac{3}{10}\, ln\,|x-3| + \frac{7}{10}\, ln\,|x+7| + k$$

8 $\int \frac{-1}{3x^2+27}\, dx$

$$\int \frac{-1}{3x^2+27}\, dx = -\frac{1}{27}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}\, dx = -\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}}\, arc\; tg\, \frac{x}{3} + k = -\frac{1}{9}\, arc\; tg\, \frac{x}{3} + k$$

9 Resuelve, por el método de sustitución, la integral:

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

$I = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Hacemos el cambio $\sqrt{x} = t \;\to\; x = t^2 \;\to\; dx = 2t\,dt$

$$I = \int \frac{1+t^2}{1+t} \cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t+t^3}{1+t}\,dx \overset{(1)}{=} 2\int \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}\right) dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2ln\,|t+1|\right)$$

(1) Dividimos $(t^3 + t) : (t + 2)$ y expresamos de la forma:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \text{resto}$$

Deshaciendo el cambio:

$$I = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4ln\,(\sqrt{x}+1) + k$$

10 Aplica la integración por partes para calcular:

$$\int cos\,(ln\,x)\,dx$$

$I = \int cos\,(ln\,x)\,dx$

$$\begin{cases} cos\,(ln\,x) = 0 \;\to\; -\dfrac{1}{x}\,sen\,(ln\,x)\,dx = du \\ dx = dv \;\to\; x = v \end{cases}$$

$$I = x\,cos\,(ln\,x) + \underbrace{\int sen\,(ln\,x)\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} sen\,(ln\,x) = u \;\to\; \dfrac{1}{x}\,cos\,(ln\,x)\,dx = du \\ dx = dv \;\to\; x = v \end{cases}$$

$$I_1 = x\,sen\,(ln\,x)\;\underbrace{\int cos\,(ln\,x)\,dx}_{I}$$

$$I = x \cdot cos\,(ln\,x) + x \cdot sen\,(ln\,x) - I \;\to\; I = \frac{x \cdot cos\,(ln\,x) + x \cdot sen\,(ln\,x)}{2} + k$$

11 De la función $f(x)$, se sabe que:

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2},\quad f(2) = 0$$

a) Determina f.

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por (0, 1).

a) $f(x) = \int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx = 3\int (x+1)^{-2}\,dx = \frac{3(x+1)^{-1}}{-1} + k = \frac{-3}{x+1} + k$

$f(2) = \frac{-3}{2+1} + k = -1 + k \;\to$ Como $f(2) = 0,\; -1 + k = 0 \;\to\; k = 1$

$f(x) = \frac{-3}{x+1} + 1 = \frac{x-2}{x+1}$

b) $g(x) = \int \frac{x-2}{x+1}\,dx = \int \left(1 + \frac{-3}{x+1}\right) dx = x - 3ln\,|x+1| + k$

$g(0) = 0 - 3ln\,|0+1| + k = k \;\to$ Como $g(0) = 1,\; k = 1.$

La primitiva de f que pasa por (0, 1) es $g(x) = x - 3ln\,|x+1| + 1.$

12 Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{sen\ 2x}{1+cos^2 2x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2-4x+6}\,dx$

a) Hacemos el cambio $u = cos\ 2x \to du = -2sen\ 2x\ dx \to -\frac{du}{2} = sen\ 2x\ dx$

$$\int \frac{sen\ 2x}{1+cos^2 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = -\frac{1}{2}\,arc\ tg\ u + k = -\frac{1}{2}\,arc\ tg\ cos\ 2x + k$$

b) Como el denominador no tiene raíces reales:

$$I = \int \frac{3x+2}{x^2-4x+6}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+\frac{3}{2}\cdot 4+2}{x^2-4x+6}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+6}\,dx + 8\int \frac{1}{x^2-4x+6}\,dx$$

Calculamos la segunda integral:

$$\int \frac{1}{x^2-4x+6}\,dx = \int \frac{1}{x^2-4x+4+2}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,arc\ tg\ \frac{x-2}{\sqrt{2}} + k = \frac{\sqrt{2}}{2}\,arc\ tg\ \frac{x-2}{\sqrt{2}} + k$$

El resultado final es:

$$I = \frac{3}{2}\,ln\,(x^2-4x+6) + 4\sqrt{2}\,arc\ tg\ \frac{x-2}{\sqrt{2}} + k$$

13 De una función derivable $f(x)$ se sabe que $f(3) = 26$ y que su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x+3 & \text{si } x \le 2 \\ 2x+7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Halla la expresión de $f(x)$.

Integramos por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x+k_1 & \text{si } x \le 2 \\ x^2+7x+k_2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Como es derivable, tiene que ser continua y, en particular, lo será en $x = 2$.

$f(2) = 14 + k_1$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (2x^2+3x+k_1) = 14+k_1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2+7x+k_2) = 18+k_2 \end{cases} \to 14+k_1 = 18+k_2 \to k_2 = -4+k_1$$

Luego:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x+k & \text{si } x \le 2 \\ x^2+7x-4+k & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Por otra parte:

$f(3) = 26 \to 26 + k = 26 \to k = 0$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2+7x-4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

14 **Calcula** $\int |x+2|\,dx$.

$$|x+2| = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x<-2 \\ x+2 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$$

$$F(x) = \int |x-2|\,dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} - 2x + k_1 & \text{si } x<-2 \\ \dfrac{x^2}{2} + 2x + k_2 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$$

Como es derivable, tiene que ser continua y, en particular, lo será en $x = -2$.

$$F(-2) = -2 + k_2$$

$$\lim_{x \to 2} F(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \left(-\dfrac{x^2}{2} - 2x + k_1\right) = 2 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \left(\dfrac{x^2}{2} - 2x + k_2\right) = -2 + k_2 \end{cases} \to 2 + k_1 = -2 + k_2 \to k_2 = 4 + k_1$$

Por tanto:

$$\int |x-2|\,dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} - 2x + k & \text{si } x<-2 \\ \dfrac{x^2}{2} + 2x + 4 + k & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$$

15 **Halla la curva en la que la pendiente de las rectas tangentes en cualquier punto viene dada por la función:**

$$f(x) = \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$$

Se sabe también que la curva pasa por el punto $P(\pi, 0)$.

Llamemos $F(x)$ a la curva en cuestión.

Entonces:

$$F(x) = \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx + \int \frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,dx =$$

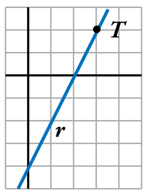
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{2}\,dx = \frac{tg\, x}{2} + \frac{x}{2} + k$$

Como pasa por P se cumple que: $F(\pi) = 0 \to \dfrac{tg\,\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} + k = 0 \to k = -\dfrac{\pi}{2}$

La función es: $F(x) = \dfrac{tg\, x}{2} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}$

16 **Determina una función $f(x)$ de la que sabemos:**

- **$f''(x) = 2$**
- **r es la tangente a f en el punto T.**



La recta tangente en el punto $T(3, 2)$ tiene pendiente $m = 2 \to \begin{cases} f(3) = 2 \\ f'(3) = 2 \end{cases}$

$f'(x) = \int 2\,dx = 2x + k_1$

$f'(3) = 2 \to 6 + k_1 = 2 \to k_1 = -4$

$f'(x) = 2x - 4$

$f(x) = \int (2x-4)\,dx = x^2 - 4x + k_2$

$f(3) = 2 \to -3 + k_2 = 2 \to k_2 = 5$

La función es: $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Autoevaluación

Página 384

1 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cot g\, x - \frac{1}{x}\right)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\ln(\cos x)}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} (x + e^{2x})^{1/x}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 1} \frac{(1/x) - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 1} \frac{-1/x^2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cot g\, x - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \overset{H}{=}$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - x\cos x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\ln(\cos x)} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{-tg\, x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{-\frac{1}{\cos^2 x}} = 0$

d) Tomamos logaritmos:

$$\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} \ln(x + e^{2x})\right] = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x + e^{2x})}{x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1 + 2e^{2x}}{x + e^{2x}}}{1} = 3$$

Por tanto: $\lim\limits_{x \to 0} (x + e^{2x})^{1/x} = e^3$

2 a) Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x + b & \text{si } x \le 1 \\ ax^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

halla los parámetros a y b para que sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) Represéntala.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones polinómicas. Por tanto, para que sea derivable en $\mathbb{R}$, solo es necesario comprobar su derivabilidad (y continuidad) en $x = 1$.

$$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^3 + 2x + b) = -1 + 2 + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (ax^2 - 1) = a - 1 \end{cases} \rightarrow 1 + b = a - 1$$ garantiza la continuidad ya que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \rightarrow f'(1^-) = -1 \\ 2a & \text{si } x > 0 \rightarrow f'(1^+) = 2a \end{cases} \rightarrow a = -\frac{1}{2};\ b = -\frac{5}{2}$$

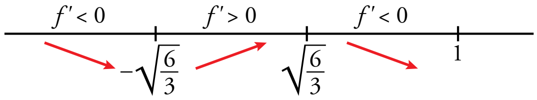
La función es $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x - \frac{5}{2} & \text{si } x \le 0 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) La primera parte es un polinomio de tercer grado que tiene una rama infinita cuando $x \to -\infty$.

$$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^3 + 2x - \frac{5}{2}\right) = +\infty$$

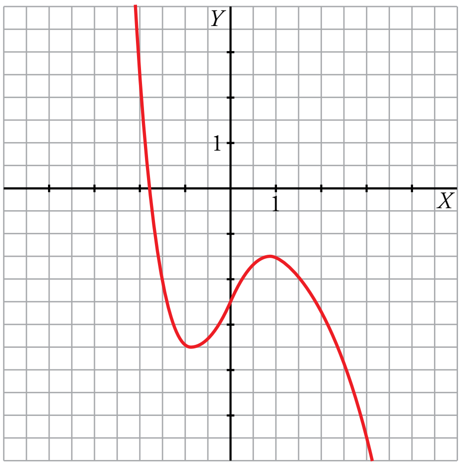
Puntos singulares:

$-3x^2 + 2 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$



En $x = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ hay un mínimo relativo y en $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ hay un máximo relativo.

La segunda parte es un polinomio de segundo grado, con coeficiente principal negativo.



3 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x & \text{si } x \le 0 \\ a + x\,ln\,x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Halla el valor de a para que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Calcula $f'(x)$ donde sea posible.

c) Halla $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 e^x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (a + x\,ln\,x) = a \end{cases}$

Tenemos que $a = 0$, ya que: $\lim\limits_{x \to 0^+} (x\,ln\,x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{ln\,x}{1/x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$

Cuando $a = 0$ se cumple que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ y la función es continua en $x = 0$. La continuidad en los demás números reales está asegurada por la definición de las dos ramas que la forman.

b) $f'(x) = \begin{cases} e^x(2x + x^2) & \text{si } x < 0 \\ ln\,x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

No existe $f'(0^+)$, luego no es derivable en $x = 0$.

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2 e^x\,dx$

$G(x) = \displaystyle\int x^2 e^x\,dx$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$G(x) = x^2 e^x - 2\int xe^x\, dx = x^2 e^x - 2I$

Volvemos a integrar por partes para calcular I:

$$\begin{cases} u = x \ \to \ du = dx \\ dv = e^x\, dx \ \to \ v = e^x \end{cases}$$

$I = \int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x$

$G(x) = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$

$\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = G(0) - G(-1) = 2 - \frac{5}{e}$

4 **a) Estudia el crecimiento de la siguiente función:**

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

b) Demuestra que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localiza un intervalo de longitud 1 que la contenga.

c) Represéntala.

a) $f'(x) = 2 + 6x + 12x^2$

Calculamos los puntos singulares:

$f'(x) = 0 \ \to \ 2 + 6x + 12x^2 = 0 \ \to$ No tiene solución

Como $f'(x) > 0$ para cada x, la función es creciente en $\mathbb{R}$.

b) Consideremos la función en el intervalo $[-1, 0]$:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y, en particular, en el intervalo anterior.

$f(-1) = -2, \ f(0) = 1$

Por el teorema de Bolzano, existe un valor $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$. Esta es la solución real de la ecuación. Además, es la única posible debido a que la función es creciente en $\mathbb{R}$.

c) La función corta al eje vertical en el punto $(0, 1)$.

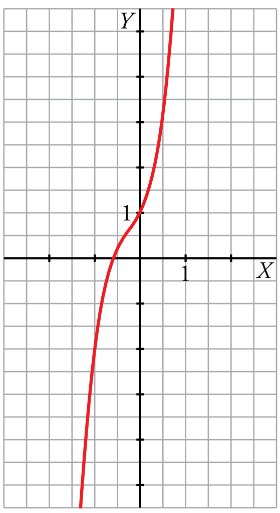
$f''(x) = 6 + 24x$

$f''(x) = 0 \ \to \ 6 + 24x = 0 \ \to \ x = -\frac{1}{4}$

En $x = -\frac{1}{4}$ hay un punto de inflexión porque pasa de convexa a cóncava.

$$x = -\frac{1}{4}, \ y = 1 + 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{5}{8}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, su gráfica es:



5 **Estudia las asíntotas y los máximos y mínimos de la función de ecuación $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$. Representa su gráfica.**

- Asíntotas:

  No tiene asíntota vertical.

  Horizontal:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{e^x} = 0 \ \to \ y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \to +\infty.$$

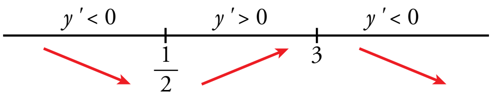
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3x}{e^x} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

  No tiene asíntota oblicua: $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 3}{e^x} = 0$

- Máximos y mínimos:

$$y' = \frac{-2x^2 + 7x - 3}{e^x}; \ y' = 0 \ \to \ -2x^2 + 7x - 3 = 0 \ \begin{cases} x = 3, \ f(3) = \dfrac{9}{e^3} \\ x = \dfrac{1}{2}, \ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-1}{e^{1/2}} \end{cases}$$

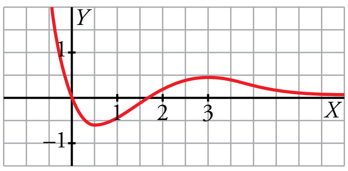
  Estudiamos el signo de y':



  Máximo $\left(3, \dfrac{9}{e^3}\right) \approx (3; 0{,}45)$

  Mínimo $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{e^{1/2}}\right) \approx (0{,}5; -0{,}6)$

- Representación:



6 **Considera la función $f(x) = \dfrac{x^2}{|x - 1|}$.**

a) Determina sus asíntotas y estudia la posición de la curva con respecto a ellas.

b) Calcula sus extremos relativos.

c) Represéntala gráficamente.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1 - x} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x^2}{x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$.

- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{|x - 1|} = +\infty \text{ ya que es un cociente de números positivos.}$$

  La recta $x = 1$ es la asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales no tiene.

- Asíntotas oblicuas:

Si $x > 1$, $\dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ $\rightarrow$ La recta $y = x + 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

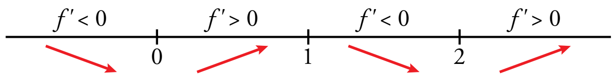
$f(x) - x - 1 = \dfrac{1}{x-1} > 0$ $\rightarrow$ La función queda por encima de la asíntota.

Si $x > 1$, $\dfrac{x^2}{1-x} = -x - 1 - \dfrac{1}{x-1}$ $\rightarrow$ La recta $y = -x - 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$f(x) + x + 1 = -\dfrac{1}{x-1} > 0$ $\rightarrow$ La función queda por encima de la asíntota.

b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 + 2x}{(1-x)^2} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

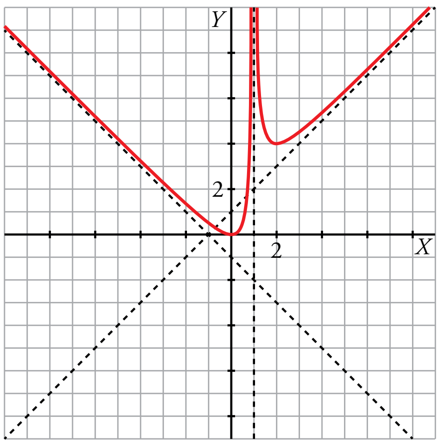
$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2 \text{ (no es un punto en el dominio de esta rama)} \\ x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (tampoco está en el dominio)},\ x = 2 \end{cases}$



$x = 0,\ y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es un mínimo relativo.

$x = 2,\ y = 4 \rightarrow (2, 4)$ es un mínimo relativo.

c)



7 **Dada la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{a - x}$ para $x \neq a$, calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (2, 3) y tenga una asíntota oblicua de pendiente –4. Representa la función para los valores de a y b obtenidos.**

f pasa por (2, 3) $\rightarrow f(2) = 3 \rightarrow \dfrac{4a + b}{a - 2} = 3$

La pendiente de la asíntota oblicua es:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + b}{ax - x^2} = -a \rightarrow -a = -4 \rightarrow a = 4$$

$$\frac{16 + b}{4 - 2} = 3 \rightarrow b = -10$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{4x^2 - 10}{4 - x} = -4x - 16 - \dfrac{54}{x - 4}$

Cortes con los ejes:

Eje X: $f(x) = 0 \rightarrow 4x^2 - 10 = 0 \rightarrow x = \dfrac{\sqrt{10}}{2},\ x = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Eje Y: $f(0) = -\dfrac{5}{2}$

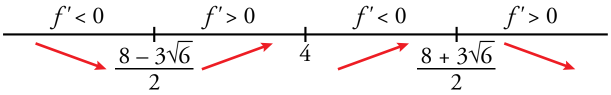
La recta $x = 4$ es la asíntota vertical de la función.

La asíntota oblicua es la recta $y = -4x - 16$.

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2(-2x^2 + 16x - 5)}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 16x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{8 + 3\sqrt{6}}{2},\ x = \frac{8 - 3\sqrt{6}}{2}$$

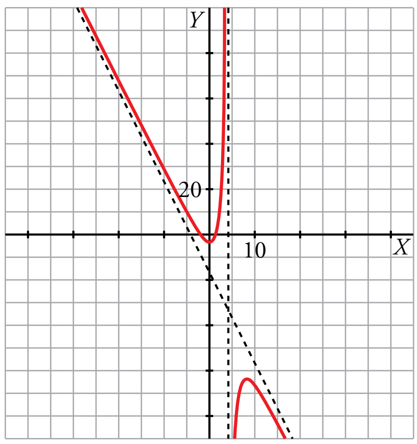


En $x = \dfrac{8 - 3\sqrt{6}}{2}$ hay un mínimo relativo.

En $x = \dfrac{8 + 3\sqrt{6}}{2}$ hay un máximo relativo.

$$x = \frac{8 - 3\sqrt{6}}{2},\ y = \frac{4\left(\frac{8 - 3\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 10}{4 - \frac{8 - 3\sqrt{6}}{2}} = 12\sqrt{6} - 32$$

$$x = \frac{8 + 3\sqrt{6}}{2},\ y = \frac{4\left(\frac{8 + 3\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 10}{4 - \frac{8 + 3\sqrt{6}}{2}} = -12\sqrt{6} - 32$$



8 **Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla los valores de a, b, c y d sabiendo que $f(x)$ tiene un extremo local en el punto de abscisa $x = 0$, que el punto (1, 0) es un punto de inflexión y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es –3. Represéntala.**

$f(x)$ tiene un extremo local en $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0$

El punto (1, 0) es un punto de inflexión $\rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{cases}$

La pendiente de la tangente en $x = 1$ es $-3 \rightarrow f'(1) = -3$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f'(0) = 0 \ \rightarrow \ c = 0$

$f(1) = 0 \ \rightarrow \ a + b + d = 0$

$f''(1) = 0 \ \rightarrow \ 6a + 2b = 0$

$f'(1) = -3 \ \rightarrow \ 3a + 2b = -3$

$$\left.\begin{array}{l} 6a + 2b = 0 \\ 3a + 2b = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \ a = 1, \ b = -3$$

$1 - 3 + d = 0 \ \rightarrow \ d = 2$

La función es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Para representar la función solo necesitamos los cortes con los ejes y los puntos singulares.

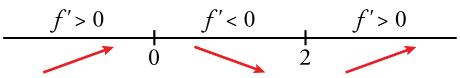
Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \ \rightarrow \ x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \ \rightarrow \ x = 1 + \sqrt{3}, \ x = 1 - \sqrt{3}, \ x = 1$

Con el eje Y: $f(0) = 2$

Puntos singulares:

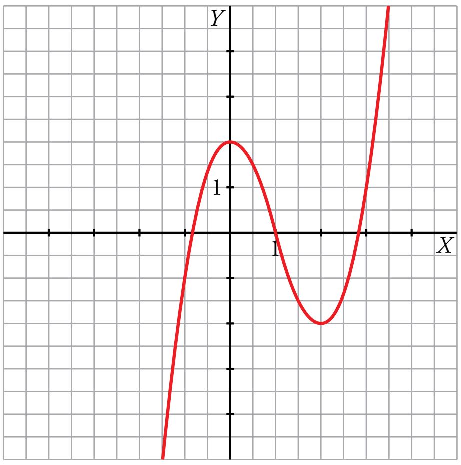
$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 3x^2 - 6x = 0 \ \rightarrow \ x = 0, \ x = 2$



El punto (0, 2) es un máximo relativo.

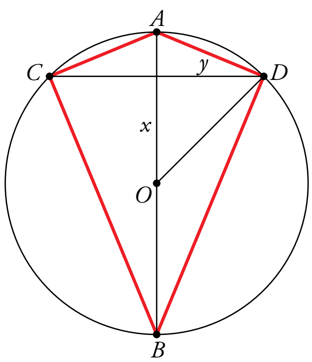
El punto (2, –2) es un mínimo relativo.



9 **En una circunferencia de centro O y radio 10 cm, se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro.**

¿A qué distancia del centro O debe estar esa cuerda para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima?

Consideremos el dibujo:



$y = \sqrt{100 - x^2}$

El área del triángulo superior es: $\dfrac{2\sqrt{100 - x^2}\,(10 - x)}{2} = \sqrt{100 - x^2}\,(10 - x)$

El área del triángulo inferior es: $\dfrac{2\sqrt{100 - x^2}\,(10 + x)}{2} = \sqrt{100 - x^2}\,(10 + x)$

La diferencia de las áreas es:

$$f(x) = \sqrt{100 - x^2}\,(10 + x) - \sqrt{100 - x^2}\,(10 - x) = 2x\sqrt{100 - x^2} \quad \text{con } 0 < x < 10$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{-2x^2 + 100}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x^2 + 100 = 0 \;\rightarrow\; x = 5\sqrt{2}$$

Se puede ver fácilmente, estudiando el signo de la derivada primera, que en el valor obtenido hay un máximo relativo.

La distancia del origen a la que debe estar la cuerda es de $5\sqrt{2}$ cm.

10 Calcula a y b para que se pueda aplicar el teorema de Rolle a la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ -2 + \sqrt{x - 1} & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases}$$

en el intervalo [0, 5]. ¿En qué punto se cumplirá el teorema?

- f debe ser continua en $x = 2$. Por ello:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} ax + bx^2 = 2a + 4b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} -2 + \sqrt{x - 1} = -2 + 1 = -1 \end{array}\right\} \; 2a + 4b = -1$$

- f debe ser derivable en $x = 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} a + 2bx & 0 \le x < 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x - 1}} & 2 < x \le 5 \end{cases} \;\rightarrow\; a + 4b = \frac{1}{2\sqrt{2 - 1}} = \frac{1}{2}$$

Resolvemos este sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 4b = -1 \\ a + 4b = 1/2 \end{array}\right\} \; a = -\frac{3}{2},\; b = \frac{1}{2}$$

- $f(0) = 0;\; f(5) = -2 + \sqrt{5 - 1} = 0$

f cumple las hipótesis del teorema de Rolle. Este dice que si f es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Buscamos el punto donde se cumple el teorema:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ -2 + \sqrt{x - 1} & 2 < x \le 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} + x & 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x - 1}} & 2 < x \le 5 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2} + x = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{3}{2}$$

En $x = \dfrac{3}{2}$, se verifica que $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$.

11 **Dada la función $f(x) = x^x - 2^x + 1$:**

a) Prueba que existe algún $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

b) ¿Podemos asegurar que existe un $\beta \in (1, 3)$ tal que $f(\beta) = 10$?

c) Escribe la ecuación de la recta tangente a f en el punto de abscisa 2.

a) Calculamos primero la derivada de $g(x) = x^x$ tomando logaritmos.

$$\ln g(x) = x \ln x \to \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln x + 1 \to g'(x) = x^x(\ln x + 1)$$

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) - 2^x \ln 2$$

La función $f'(x)$ es continua cuando $x > 0$. En particular, lo es en el intervalo $[1, 2]$.

$$f'(1) = 1 - 2\ln 2 < 0$$

$$f'(2) = 4 > 0$$

Aplicando el teorema de Bolzano a $f'(x)$ deducimos que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

b) La función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

$$f(1) = 0$$

$$f(3) = 3^3 - 2^3 + 1 = 20$$

Aplicando el teorema de los valores intermedios (de Darboux), la función toma todos los valores comprendidos entre 0 y 20. Luego existe $\beta \in (1, 3)$ tal que $f(\beta) = 10$.

c) $x = 2$, $f(2) = 1$, $f'(2) = 4 \to$ La recta tangente es $y = 1 + 4(x - 2)$.

12 **Justifica si se puede aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = 1 + x|x|$ en el intervalo $[-1, 1]$ y, en caso afirmativo, calcula los puntos donde se cumple el teorema.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \to f'(0^-) = 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \to f'(0^+) = 0 \end{cases} \to f'(0^-) = f'(0^+) = 0$$

Por todo lo anterior, la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Por tanto, cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 1]$.

Luego existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{2 - 0}{2} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} -2x = 1 \to x = -\dfrac{1}{2} \\ 2x = 1 \to x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \text{Son los valores donde se cumple el teorema.}$$

13 **Calcula el valor de $a > 0$ para que el valor del área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -a$.**

La pendiente de la recta tangente en $x = -a$ es:

$$f'(x) = -2x \to f'(a) = 2a$$

La parábola corta al eje de abscisas en $x = -a$ y en $x = a$.

Por la simetría respecto del eje Y, el área es:

$$A = 2\int_0^a (-x^2 + a^2)\,dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} + a^2 x\right]_0^a = 2 \cdot \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$$

Como la pendiente y el área son iguales:

$$2a = \frac{4}{3}a^3 \to \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ a = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \text{ (no es un punto que cumpla } a > 0) \\ a = 0 \text{ (tampoco es un punto válido)} \end{cases}$$

Luego $a = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

14 Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2sen\, x\, cos\, x}{1 + sen^2\, x}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{cos^2\, x}{sen\, x}\, dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2sen\, x\, cos\, x}{1 + sen^2\, x}\, dx = ln\,(1 + sen^2\, x) + k$, porque $D[1 + sen^2\, x] = 2sen\, x\, cos\, x$

b) $\displaystyle\int \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = -\int \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\, dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx =$

$= -\sqrt{1 - x^2} + 3arc\, sen\, x + k$

c) $\displaystyle I = \int \frac{cos^2\, x}{sen\, x}\, dx = \int \frac{cos^2\, x}{sen^2\, x}\, sen\, x\, dx$

Hacemos el cambio de variable $u = cos\, x \to du = -sen\, x\, dx \to -du = sen\, x\, dx$

$$I = -\int \frac{u^2}{1 - u^2}\, du = \int \left(1 - \frac{1}{1 - u^2}\right) du = \int du - \int \frac{1}{1 - u^2}\, du = u - I_1$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{A}{1 + u} + \frac{B}{1 - u} \to A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1 + u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1 - u} = \frac{1}{2}\, ln\,|1 + u| - \frac{1}{2}\,|1 - u| + k$$

Sustituimos en I:

$$I = u - I_1 = u - \frac{1}{2}\, ln\,|1 + u| + \frac{1}{2}\,|1 - u| + k = cos\, x - \frac{1}{2}\, ln\,(1 + cos\, x) + \frac{1}{2}\, ln\,(1 - cos\, x) + k$$

15 Sea f la función definida por la expresión:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)} \quad \textbf{para } x \neq 0 \textbf{ y } x \neq 1$$

y sea $F(x)$ la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(2,\, ln\, 2)$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto P.

b) Determina la función $F(x)$.

a) Como $F'(x) = f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)}$

$F'(2) = f(2) = \dfrac{5}{4}$

La ecuación de la recta tangente es: $y = ln\ 2 + \dfrac{5}{4}(x - 2)$

b) $F(x) = \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \rightarrow A = -1,\ B = -1,\ C = 2$$

Por tanto,

$$F(x) = \int\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right)dx = -ln\,|x| + \frac{1}{x} + 2ln\,|x-1| + k$$

$$F(2) = ln\,2 \rightarrow -ln\,2 + \frac{1}{2} + k = ln\,2 \rightarrow k = 2ln\,2 - \frac{1}{2}$$

La función es: $F(x) = -ln\,x + \frac{1}{x} + 2ln\,(x-1) + 2ln\,2 - \frac{1}{2}$

16 **Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 3x$ y la recta $y = x$.**

Hallamos las abscisas de los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x \\ y = x \end{array}\right\} \rightarrow x = -2,\ x = 0,\ x = 2$$

Calculamos la función diferencia $h(x) = x^3 - 3x - x = x^3 - 4x$

$$G(x) = \int (x^3 - 4x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

$$G(-2) = -4,\ G(0) = 0,\ G(2) = -4$$

$$\int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)\,dx = G(0) - G(-2) = 4$$

$$\int_{0}^{2}(x^3 - 4x)\,dx = G(2) - G(0) = -4$$

Área = 4 + 4 = 8 u^2

17 **Halla el área del recinto limitado por los ejes X e Y y la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$$

Calculamos los puntos de corte con el eje X:

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

El problema consiste en calcular el área comprendida entre el eje X y la función desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

$$G(x) = \int \frac{x^3-1}{x^2+1}\,dx$$

$$\frac{x^3-1}{x^2+1} = x - \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$G(x) = \int\left(x - \frac{x+1}{x^2+1}\right)dx = \int x\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1) - arc\ tg\ x$$

$$\int_0^1 \frac{x^3-1}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1) - arc\ tg\ x\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,ln\,2 - \frac{\pi}{4}$$

Área = $\frac{ln\,2 - 1}{2} + \frac{\pi}{4}$ u^2

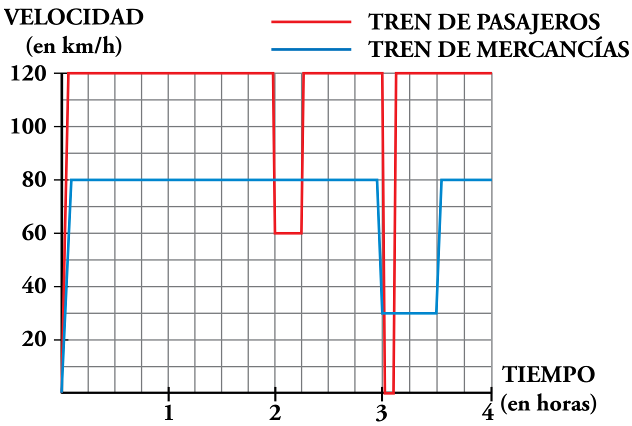
Resuelve

Página 357

Dos trenes

Un tren de pasajeros y un tren de mercancías salen de la misma estación, por la misma vía y en idéntica dirección, uno tras otro, casi simultáneamente.

Estas son las gráficas TIEMPO-VELOCIDAD que describen ambos movimientos:



Como podemos ver en la gráfica, el tren de pasajeros, a las dos horas reduce su velocidad:

— ¿A qué puede deberse?

— ¿Por qué no aminora la marcha también el otro tren en ese instante?

A las tres horas, ambos trenes modifican su marcha: el tren de pasajeros se detiene durante breves minutos, mientras que el tren de mercancías va muy despacio durante media hora.

- **Para hacernos una idea clara de estos movimientos, realicemos algunos cálculos:**

a) El tren de pasajeros, durante 2 h, va a 120 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

b) De 2 a $2\frac{1}{4}$, el tren de pasajeros disminuye su velocidad.

¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

c) El tren de mercancías aminora la marcha a las 3 h. ¿Qué distancia ha recorrido hasta ese momento?

d) ¿Qué distancia recorre el tren de mercancías durante la media hora en que va a baja velocidad?

Haciendo los cálculos anteriores, podrás comprobar que:

Ambos trenes recorren 240 km a velocidad normal. Reducen la velocidad en el mismo lugar y recorren, así, otros 15 km (puede ser debido a obras en la vía) y, a continuación, recupera cada cual su velocidad normal. (es decir, el tren de mercancías no frena *cuando* el de pasajeros, pero sí *donde* el tren de pasajeros). Más adelante, el tren de pasajeros para en una estación.

e) ¿A qué distancia de la estación de salida está esta otra en la que para el tren de pasajeros?

f) Observa que en todos los cálculos que has realizado hasta ahora se han obtenido áreas bajo las gráficas, roja o azul. Señala en tu cuaderno los recintos cuyas áreas has calculado y asigna a cada uno su área correspondiente.

a) $120 \cdot 2 = 240$ km.

b) A 60 km/h durante $\frac{1}{4}$ de hora, recorre $\frac{60}{4} = 15$ km.

c) Ha ido a 80 km/h durante 3 horas, luego ha recorrido $80 \cdot 3 = 240$ km.

d) Va a 30 km/h durante $\frac{1}{2}$ hora, luego recorre $30 \cdot \frac{1}{2} = 15$ km.

e) La parada la hace a las 3 horas; en este momento lleva recorrida una distancia de:

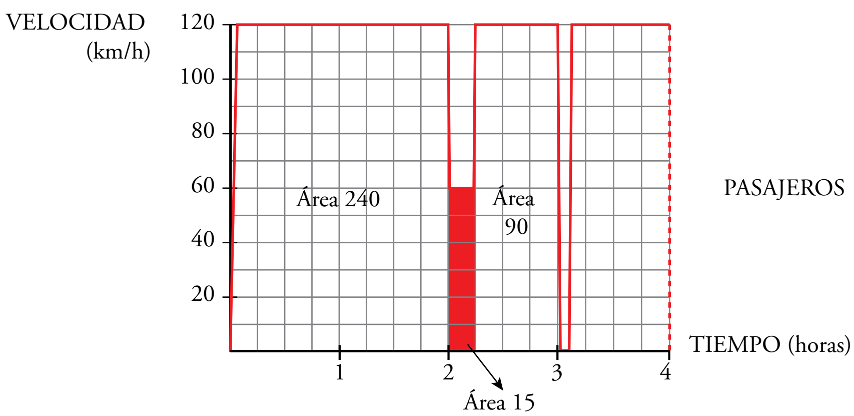
$120 \cdot 2 = 240$ km en las dos primeras horas

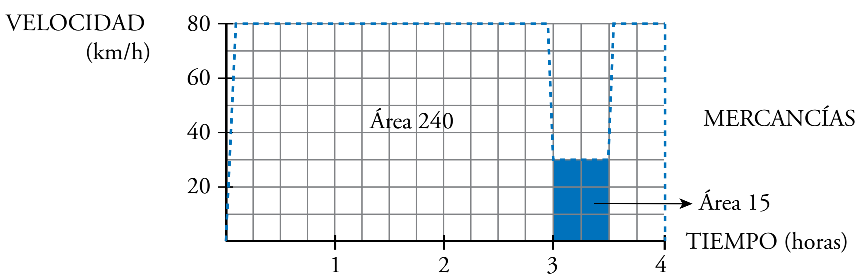
$60 \cdot \frac{1}{4} = 15$ km el siguiente cuarto de hora

$120 \cdot \frac{3}{4} = 90$ km los siguientes tres cuartos de hora

Total: $240 + 15 + 90 = 345$ km hasta llegar a la parada.

f)





2 Una condición para que una función sea integrable en [*a*, *b*]

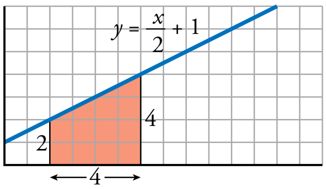
Página 363

1 Halla gráficamente las siguientes integrales:

a) $\int_2^6 \left(\frac{x}{2}+1\right) dx$

b) $\int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2}\, dx$

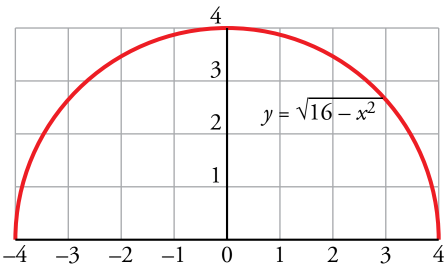
a) Es un trapecio cuyas bases miden 2 y 4 y cuya altura mide 4.



$\text{Área} = \frac{2+4}{2} \cdot 4 = 12 \text{ u}^2$

b) $y = \sqrt{16-x^2} \ \to\ y^2 = 16-x^2 \ \to\ x^2+y^2 = 4^2$ (Circunferencia)

El recinto cuya área queremos calcular es medio círculo de radio 4 u.



$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{16}{2} \cdot \pi = 8 \cdot \pi = 25{,}1 \text{ u}^2$

2 Halla gráficamente las siguientes integrales:

a) $\int_{-4}^4 (\sqrt{16-x^2}+4)\, dx$

b) $\int_{-4}^4 (4-\sqrt{16-x^2})\, dx$

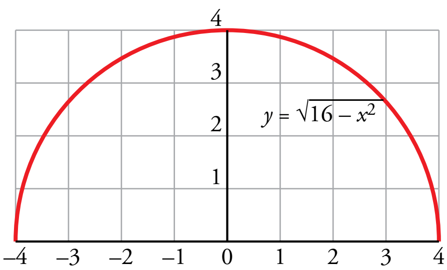
a) $\int_{-4}^4 (\sqrt{16-x^2}+4)\, dx = \int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2} + \int_{-4}^4 4\, dx$

Llamamos $I_1 = \int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2}\, dx$ e $I_2 = \int_{-4}^4 4\, dx$.

Resolvemos gráficamente ambas integrales para posteriormente sumar los resultados.

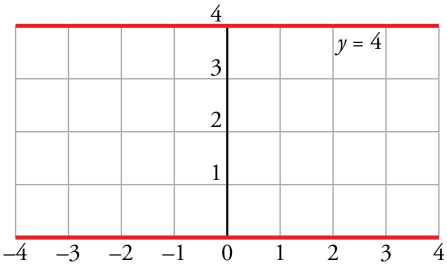
I_1: $y = \sqrt{16-x^2} \ \to\ y^2 = 16-x^2 \ \to\ x^2+y^2 = 4^2$ (circunferencia)

El recinto cuya área queremos calcular es medio círculo de radio 4 u.



$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{16}{2} \cdot \pi = 8 \cdot \pi = 25{,}1 \text{ u}^2$

I_2: Se trata de un rectángulo de dimensiones 8 u × 8 u. Por tanto, su área es 32 u^2.



Finalmente, $I_1 + I_2 = 25{,}1 + 32 = 57{,}1$ u^2.

b) $\int_{-4}^{4} (4 - \sqrt{16 - x^2})\, dx = \int_{-4}^{4} 4\, dx - \int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\, dx$

Observamos que se trata de las mismas integrales que en el apartado a), solo que ahora es $I_2 - I_1$, dando como resultado $32 - 25{,}1 = 6{,}9$ u^2.

3 Propiedades de la integral

Página 365

1 Dadas las integrales: $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 3$ **y** $\int_{-5}^{2} f(x)\,dx = 7$

¿Cuánto vale $\int_{-5}^{-1} f(x)\,dx$**?**

$$\int_{-5}^{2} f(x)\,dx = \int_{-5}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \to 7 = \int_{-5}^{-1} f(x)\,dx + 3 \to \int_{-5}^{-1} f(x)\,dx = 4$$

2 Justifica esta desigualdad:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Usando la propiedad 7 tenemos:

$$f(x) \le |f(x)| \text{ para cada } x \in [a, b] \to \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$-f(x) \le |f(x)| \text{ para cada } x \in [a, b] \to \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [-f(x)\,dx] \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Por tanto:

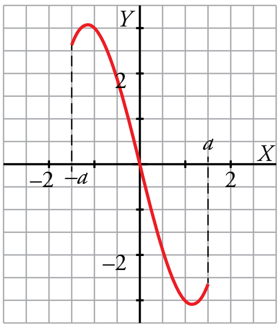
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

3 Justifica las siguientes implicaciones:

a) Si f es impar: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

b) Si f es par: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

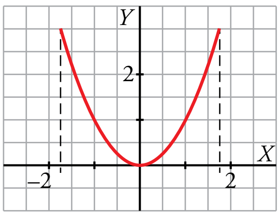
a)



Consideremos las áreas comprendidas entre la gráfica de la función, el eje horizontal y las rectas $x = -a$ y $x = a$. Ambas áreas son iguales, pero, mientras una queda representada por encima del eje X, la otra queda por debajo debido a la simetría respecto del origen. En consecuencia:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

b)



El área comprendida entre la gráfica de la función, el eje horizontal y las rectas $x = -a$ y $x = a$ está formada por dos áreas simétricas respecto del eje vertical debido a la paridad de la función. En consecuencia:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

4 **Halla el valor del punto c que se postula en el T.V.M. del cálculo integral para $f(x) = x + 3$ y el intervalo [–2, 4].**

$\int_{-2}^{4}(x+3)\,dx = \frac{1+7}{2} \cdot 6 = 24$ ya que es el área de un trapecio de bases menor y mayor $f(-2)$ y $f(4)$, respectivamente.

$f(c) \cdot [4-(-2)] = 24 \rightarrow f(c) = 4 \rightarrow c + 3 = 4 \rightarrow c = 1$ es el valor del intervalo (–2, 4) que se postula en el T.V.M.

4 La integral y su relación con la derivada

Página 367

1 Sea la función $F(x) = \int_0^x log\,(t^2 + 4)\,dt$. Calcula $F'(x)$.

$F(x) = \int_0^x log\,(t^2 + 4)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$, siendo $f(t) = log(t^2 + 4)$ continua.

Por el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = f(x) = log(x^2 + 4)$$

2 Calcula la siguiente integral:

$$\int_0^{\pi/2} cos\,x\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2} cos\,x\,dx = \left[sen\,x\right]_0^{\pi/2} = sen\,\frac{\pi}{2} - sen\,0 = 1 - 0 = 1$$

5 Regla de Barrow

Página 368

1 Calcula: $\int_1^6 (4x^3 - 4x^4 - 3)\,dx$

$$I = \left[x^4 - \frac{4}{5}x^5 - 3x\right]_1^6 = \left(6^4 - \frac{4}{5}\cdot 6^5 - 3\cdot 6\right) - \left(1^4 - \frac{4}{5}\cdot 1^5 - 3\cdot 1\right) = -4\,942{,}8 + 2{,}8 = -4\,940$$

2 Calcula: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$I = [arc\ tg]_0^1 = arc\ tg\ 1 - arc\ tg\ 0 = \frac{\pi}{4}$$

Observación: $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}$

6 Cálculo de áreas mediante integrales

Página 370

1 Halla el área comprendida entre la función $y = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje X.

I. Hallamos las soluciones de la ecuación: $x^3 - x^2 - 6x = 0$

Son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 3$.

II. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - x^2 - 6x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2$$

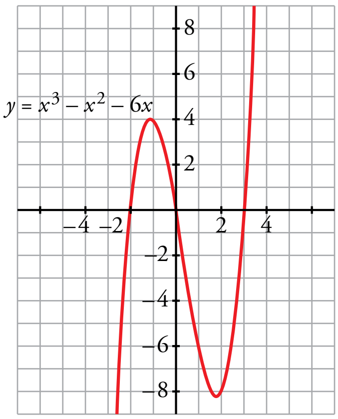
III. $G(-2) = \frac{-16}{3}$, $G(0) = 0$, $G(3) = \frac{-63}{4}$

IV. $G(0) - G(-2) = \frac{16}{3}$

$G(3) - G(0) = \frac{-63}{4}$

El área buscada es: $\frac{16}{3} + \left|\frac{-63}{4}\right| = \frac{253}{12}$ u^2

(Se incluye la gráfica para entender el proceso, pero es innecesaria para obtener el área).



2 Halla el área comprendida entre las funciones $y = x^4 + x^3$ e $y = x^4 + x^2 + 6x$.

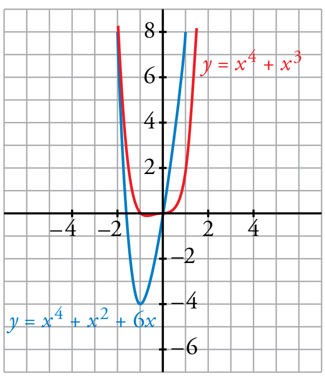
Se obtiene la función diferencia:

$$y = (x^4 + x^3) - (x^4 + x^2 + 6x) = x^3 - x^2 - 6x$$

Ahora se calcula el área comprendida entre esta función y el eje X, lo cual se ha hecho ya en el ejercicio anterior.

Por tanto, el área buscada es $\frac{253}{12}$ u^2.

(También aquí es innecesaria la gráfica para obtener el área buscada).



Página 371

3 Halla:

a) $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{t^2}\,dt$ **b)** $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{t}\,dt$ **c)** $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{-t}}\,dt$ **d)** $\int_{-1}^{0} \frac{1}{t^2}\,dt$

a) $\int_{x}^{1} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{x}^{1} = -1 + \frac{1}{x} \to -1$ si $x \to -\infty$

Luego: $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{t^2}\,dt = -1$

b) Como la función $f(t) = \frac{1}{t}$ no está acotada ya que $f(t) \to \pm\infty$ cuando $t \to 0$, debemos estudiar por separado $\int_{0}^{1} \frac{1}{t}\,dt$ y $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t}\,dt$:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x \to 0^+} \int_{x}^{1} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x \to 0^+} \left[\ln t\right]_{x}^{1} = \lim_{x \to 0^+} (-\ln x) = +\infty$$

Por tanto, no existe la integral planteada.

c) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{-t}}\,dt = \lim_{x \to 0^-} \int_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{-t}}\,dt = \lim_{x \to 0^-} \left[-2\sqrt{-t}\right]_{-1}^{x} = \lim_{x \to 0^-} (-2\sqrt{-x} + 2) = 2$

d) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x \to 0^-} \int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x \to 0^-} \left[-\frac{1}{t}\right]_{-1}^{x} = \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{x} - 1\right) = +\infty$

Luego no existe la integral.

7 Volumen de un cuerpo de revolución

Página 372

1 **Calcula el volumen de una esfera de radio 5 cm haciendo girar la semicircunferencia $y = \sqrt{25 - x^2}$ alrededor del eje X. ¿Qué límite de integración debes tomar?**

$$V = \pi \cdot \int_{-5}^{5} (\sqrt{25 - x^2})^2 \, dx = \pi \cdot \int_{-5}^{5} (25 - x^2) \, dx = \pi \cdot \left[25x - \frac{x^3}{3} \right]_{-5}^{5} = \pi \cdot \frac{500}{3} \ \text{u}^3$$

Observación: el volumen del cuerpo engendrado por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, al girar alrededor del eje X, es:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \ \text{u}^3$$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 373

1. Área limitada por una curva y el eje X

Hazlo tú. **Halla el área comprendida entre la gráfica de la función $y = x^3 + x^2 - 2x$ y el eje X.**

$x^3 + x^2 - 2x = 0 \to x = -2,\ x = 0,\ x = 1$

$$G(x) = \int (x^3 + x^2 - 2x)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$$

$$G(-2) = \frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 = -\frac{8}{3};\ G(0) = 0;\ G(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{5}{12}$$

$$\int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\, dx = G(0) - G(-2) = 0 - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$\int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)\, dx = G(1) - G(0) = -\frac{5}{12} - 0 = -\frac{5}{12}$$

Área $= \frac{8}{3} + \left|\frac{-5}{12}\right| = \frac{37}{12}$ u^2

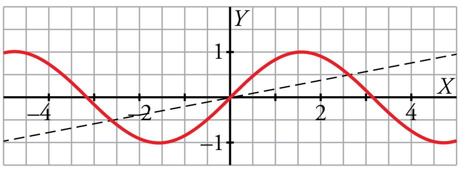
2. Área entre dos curvas

Hazlo tú.

Comprueba que la recta $y = \frac{3}{5\pi}x$ corta a la gráfica de $y = sen\ x$ en el punto $\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2}\right)$.

Halla el área comprendida entre $y = \frac{3}{5\pi}x$ e $y = sen\ x$.

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{6} \to y = \frac{3}{5\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ x = \frac{5\pi}{6} \to y = sen\ \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \to \text{La recta y la curva se cortan en el punto } \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$$



Por la simetría del área respecto del origen podemos plantear el área calculando una de las dos partes y multiplicando el resultado por 2.

$$G(x) = \int \left(sen\ x - \frac{3x}{5\pi}\right) dx = -cos\ x - \frac{3x^2}{10\pi}$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \left(sen\ x - \frac{3x}{5\pi}\right) dx = \left[-cos\ x - \frac{3x^2}{10\pi}\right]_0^{\frac{5\pi}{6}} = -cos\ \frac{5\pi}{6} - \frac{3 \cdot (5\pi/6)^2}{10\pi} - (-1) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{24} + 1$$

Área $= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{24} + 1\right) = \sqrt{3} - \frac{5}{12}\pi + 2$ u^2

Página 374

3. Área entre dos curvas

Hazlo tú. **Halla el área delimitada por las gráficas de las funciones siguientes:**

$$\boldsymbol{y = x^4 + 5x^3 - 11 \qquad y = x^2 + 5x - 11}$$

$x^4 + 5x^3 - 11 - (x^2 + 5x - 11) = x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x$

$x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x = 0 \;\to\; x = -5,\; x = -1,\; x = 0,\; x = 1$

$$G(x) = \int (x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x)\, dx = \frac{x^5}{5} + \frac{5x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}$$

$$G(-5) = \frac{(-5)^5}{5} + \frac{5 \cdot (-5)^4}{4} - \frac{(-5)^3}{3} - \frac{5 \cdot (-5)^2}{2} = \frac{1\,625}{12}$$

$$G(-1) = \frac{-1}{5} + \frac{5}{4} - \frac{-1}{3} - \frac{5}{2} = -\frac{67}{60}$$

$$G(0) = 0$$

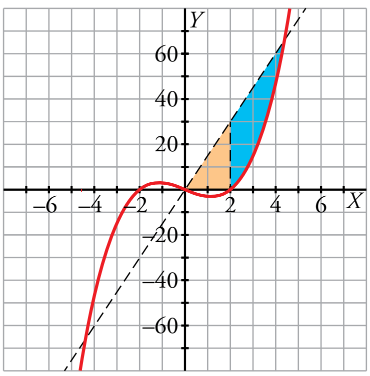
$$G(1) = \frac{1}{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} = -\frac{83}{60}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-5}^{-1} (x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x)\, dx = G(-1) - G(-5) = -\frac{67}{60} - \frac{1\,625}{12} = -\frac{2\,048}{15} \\ \displaystyle\int_{-1}^{0} (x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x)\, dx = G(0) - G(-1) = \frac{67}{60} \\ \displaystyle\int_{1}^{0} (x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x)\, dx = G(1) - G(0) = -\frac{83}{60} \end{array}\right\}$$

$$\text{Área} = \frac{2\,048}{15} + \frac{67}{60} + \frac{83}{60} = \frac{4\,171}{30}\ \text{u}^2$$

5. Área de un recinto

Hazlo tú. **Halla el área del recinto limitado por las rectas $y = 0$, $y = 15x$ y la curva $y = x^3 - 4x$, $x \geq 0$.**



Puntos de corte:

(0, 0); (2, 0)

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 4x \\ y = 15x \end{array}\right\} \to\; x^3 - 4x = 15x \;\to\; x = \sqrt{19} \quad (\text{ya que } x \geq 0)$$

$R_1 = \dfrac{2 \cdot 15}{2} = 30$ (es un triángulo de base 2 y altura 30)

$$R_2 = \int_2^{\sqrt{19}} (15x - x^3 + 4x)\, dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{19x^2}{2}\right]_2^{\sqrt{19}} = -\frac{\sqrt{19}^4}{4} + \frac{19 \cdot \sqrt{19}^2}{2} - \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{19 \cdot 2^2}{2}\right) = \frac{225}{4}$$

$$\text{Área} = R_1 + R_2 = 30 + \frac{225}{4} = \frac{345}{4}\ \text{u}^2$$

Página 375

6. Volumen (giro alrededor del eje X)

Hazlo tú. **Calcula el volumen generado por $y = -x^2 + 4$, $-2 \le x \le 1$, al girar alrededor del eje X.**

$$V = \pi \int_{-2}^{1} f(x)^2\, dx = \pi \int_{-2}^{1} (-x^2 + 4)^2\, dx = \pi \int_{-2}^{1} (x^4 + 16 - 8x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + 16x - \frac{8x^3}{3} \right]_{-2}^{1} = \pi \left[\frac{203}{15} - \left(-\frac{256}{15} \right) \right] = 30,60\, \pi \ \text{u}^3$$

7. Volumen (giro alrededor del eje Y)

Hazlo tú. **Calcula el volumen generado por $y = -x^2 + 4$, $-2 \le x \le 2$, al girar alrededor del eje Y.**

$$V = \pi \int_{a}^{b} g(y)^2\, dy$$

$$y = -x^2 + 4 \ \to \ x = \sqrt{4 - y}$$

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (\sqrt{4 - y})^2\, dy = \pi \int_{-2}^{2} (4 - y)\, dy = \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_{-2}^{2} = \pi (6 - (-10)) = 16\, \pi \ \text{u}^3$$

8. Volumen de una esfera

Hazlo tú. **Halla el volumen del elipsoide de revolución que se obtiene al girar la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ alrededor del eje X.**

Despejamos la y para integrar alrededor de X.

Una de las soluciones es:

$$y = \sqrt{16 - \frac{16x^2}{25}}$$

Los límites de integración son los puntos donde la curva corta al eje X:

$$y = 0 \ \to \ \frac{x^2}{25} = 1 \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

Por tanto, el volumen de la esfera es:

$$V = \pi \int_{-5}^{5} \left(\sqrt{16 - \frac{16x^2}{25}} \right)^2 dx = \pi \int_{-5}^{5} \left(16 - \frac{16x^2}{25} \right) dx = \pi \left[16x - \frac{16x^3}{75} \right]_{-5}^{5} =$$

$$= \pi \left[\frac{160}{3} - \left(-\frac{160}{3} \right) \right] = 106,67\, \pi\, \text{u}^3$$

Página 376

9. Función integral

Hazlo tú.

$$\boldsymbol{F(x) = \int_{1}^{x^2} (t^2 - 4t)\, dt}$$

Halla sus puntos extremos.

$$F'(x) = [(x^2)^2 - 4x^2]\, 2x = (x^4 - 4x^2)\, 2x = 2x^5 - 8x^3$$

$$F'(x) = 0 \ \to \ 2x^5 - 8x^3 = 0 \ \to \ x = 2, \ x = 0, \ x = -2$$

$$F''(x) = 10x^4 - 24x^2 \to \begin{cases} F''(2) = 10 \cdot 2^4 - 24 \cdot 2^2 = 64 > 0 \\ F''(0) = 0 \\ F''(-2) = 64 > 0 \end{cases}$$

En $x = -2$ y en $x = 2$ hay dos mínimos relativos.

En $x = 0$ hay un máximo relativo (estudiando los signos de $F'(x)$ a ambos lados del valor).

Los valores de los extremos son:

$$F(2) = \int_1^4 (t^2 - 4t)\, dt = \left[\frac{t^3}{3} - 2t^2\right]_1^4 = -9$$

$$F(0) = \int_1^0 (t^2 - 4t)\, dt = -\int_0^1 (t^2 - 4t)\, dt = -\left[\frac{t^3}{3} - 2t^2\right]_0^1 = \frac{5}{3}$$

$$F(-2) = \int_1^4 (t^2 - 4t)\, dt = -9$$

Los mínimos relativos son: (2, –9) y (–2, –9).

El máximo relativo es el punto: $\left(0, \frac{5}{3}\right)$

10. Área de un recinto

Hazlo tú.

El recinto limitado por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$ debe ser partido en dos trozos de igual área por una recta paralela al eje X, $y = a$.

Halla el valor de a.

El área del recinto limitado es:

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2)\, dx = 2\int_0^2 (4 - x^2)\, dx = 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ u}^2$$

Las intersecciones de la parábola $y = x^2$ y la recta $x = a$ son $(-\sqrt{a}, a)$ y $(\sqrt{a}, a)$.

El área comprendida entre la recta $x = a$ y la parábola $y = x^2$ es:

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2)\, dx = 2\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\, dx = 2\left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = 2\left(a\sqrt{a} - \frac{\sqrt{a}^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}a^{3/2} = \frac{16}{3} \to a = 2\sqrt[3]{2}$$

Página 377

11. Volumen de un recinto infinito (Trompeta de Torricelli)

Hazlo tú.

Halla el volumen que genera la función $y = \frac{1}{x^2}$ al girar alrededor del eje X, entre $x = 1$ y $+\infty$.

Hallamos el volumen entre 1 y x:

$$V_x = \pi\int_1^x \left(\frac{1}{t^2}\right)^2 dt = \pi\int_1^x \frac{dt}{t^4} = \pi\left[-\frac{1}{3t^3}\right]_1^x = \pi\left(-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}\right)$$

$$V = \lim_{x \to +\infty} V_x = \lim_{x \to +\infty} \left[\pi\left(-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{\pi}{3} \text{ u}^3$$

12. La integral como límite de suma de rectángulos

Hazlo tú.

Halla $\int_0^2 x^2\,dx$ mediante suma de rectángulos y paso al límite.

Partimos el intervalo [0, 2] en n trozos de igual longitud. La partición está formada por los puntos

$\frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \frac{6}{n}, \ldots, \frac{2n}{n} = 2.$

En cada intervalo $\left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right]$ tomamos un rectángulo cuya altura es el valor de la función en el extremo superior. El área de cada uno de estos rectángulos es $\frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2i}{n}\right)^2$.

La suma de las áreas de los rectángulos es:

$$S_n = \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{6}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2n}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{8}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{8}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{8}{n} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2 = \frac{8}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

ya que, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 378

1. Integral definida de una función dada a trozos

Hallar la integral $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ ***siendo:***

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ \ -1 \le x \le 1 \\ -x^2 + 2x & si\ \ 1 < x \le 3 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,dx + \int_{1}^{3} (-x^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{1}^{3} =$$

$$= 0 - \frac{3^3}{3} + 3^2 - \left(-\frac{1^3}{3} + 1^2\right) = -\frac{2}{3}$$

La primera integral vale cero porque es la integral de una función par en la que los límites son simétricos respecto del origen.

En la segunda integral hay dos recintos, separados por el valor $x = 2$, uno de área positiva y el otro, algo mayor, de área negativa.

2. Área delimitada por una función definida a trozos

Hallar el área encerrada entre $f(x) = \begin{cases} x & si\ \ -1 \le x \le 1 \\ -x^2 + 2x & si\ \ 1 < x \le 3 \end{cases}$***, el eje*** X ***y las rectas*** $x = -1$, $x = 3$.

La recta $y = x$ corta al eje X en el punto (0, 0).

$$G(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$G(-1) = \frac{1}{2};\ \ G(0) = 0;\ \ G(1) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{0} x\,dx = G(0) - G(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{1} x\,dx = G(1) - G(0) = \frac{1}{2}$$

En el caso del primer tramo:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

La parábola $y = -x^2 + 2x$ corta en $x = 2$ cuando $x \in (1, 3]$.

$$\int (-x^2 + 2x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2$$

$$H(1) = \frac{2}{3};\ \ H(2) = \frac{4}{3};\ \ H(3) = 0$$

$$\int_{1}^{2} (-x^2 + 2x)\,dx = H(2) - H(1) = \frac{2}{3}$$

$$\int_{2}^{3} (-x^2 + 2x)\,dx = H(3) - H(2) = -\frac{4}{3}$$

En el caso del segundo tramo:

$$\text{Área} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

Área total = 1 + 2 = 3 u^2

3. Construcción de un polinomio definido mediante unas condiciones

Hallar un polinomio de segundo grado, $P(x)$, que cumpla:

$$\boldsymbol{P(0) = P(2) = 0 \qquad \int_0^1 P(x)\,dx = 1}$$

Como $x = 0$ y $x = 2$ son raíces del polinomio, $P(x) = kx(x - 2) = kx^2 - 2kx$

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \int_0^1 (kx^2 - 2kx)\,dx = \left[k\frac{x^3}{3} - kx^2\right]_0^1 = \frac{k}{3} - k = -\frac{2k}{3} = 1 \;\rightarrow\; k = -\frac{3}{2}$$

4. Integral impropia: área definida por una función no acotada

Hallar la integral impropia:

$$\boldsymbol{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt}$$

Como la función $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}$ no está definida en $t = 0$, se trata de una integral impropia.

$$I(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt = \int_x^1 t^{-1/3}\,dt = \left[\frac{3}{2}\,t^{2/3}\right]_x^1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt = \lim_{x \to 0^+} I(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{3}{2}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 379

Para practicar

Integral definida

1 **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_{1/e}^{e} 2\,ln\,x\,dx$ **d)** $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2x(x^2+1)^{-1/2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{1/2}}{1/2}\right]_0^2 = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^2 = \sqrt{5}-\sqrt{1} = \sqrt{5}-1$

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4\left(\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 (x^{1/2}-x^{-1/2})\,dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2\sqrt{x}\right]_1^4 =$

$\displaystyle = \left(\frac{2}{3}\sqrt{64}-2\sqrt{4}\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{1}-2\sqrt{1}\right) = \left(\frac{2}{3}\cdot 8-4\right)-\left(\frac{2}{3}-2\right) = \frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$

c) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} 2\,ln\,x\,dx$. Integramos por partes $\displaystyle\int ln\,x\,dx$:

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\,x \;\to\; du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \;\to\; v = x \end{array}\right\}$$

$$\int ln\,x\,dx = x\,ln\,x - \int 1\,dx = x\,ln\,x - x$$

$$\int_{1/e}^{e} 2\,ln\,x = \left[2x\,ln\,x-2x\right]_{1/e}^{e} = (2e\,ln\,e-2e)-\left(2\cdot\frac{1}{e}\,ln\,\frac{1}{e}-2\cdot\frac{1}{e}\right) =$$

$$= (2e-2e)-\left(\frac{2}{e}(-1)-\frac{2}{e}\right) = -\left(-\frac{4}{e}\right) = \frac{4}{e}$$

d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

Calculamos una primitiva:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - arc\,tg\,x$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \left[x-arc\,tg\,x\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)-\left(-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$$

2 **Calcula:** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} sen\,x\,cos\,x\,dx$

$$\int_0^{\pi/4} sen\,x\cdot cos\,x\,dx \overset{(*)}{=} \int_0^{\sqrt{2}/2} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{4}$$

(*) Aplicamos el siguiente cambio:

$sen\,x = t;\;\; cos\,x\cdot dx = dt$

para $x = 0;\;\; t = 0$

para $x = \dfrac{\pi}{4};\;\; t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3 **Halla el valor de la integral definida de la función** $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 3\cos(2\pi x)$ **en el intervalo** $I = [0, 2]$.

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} - 3\cos(2\pi x)\right) dx = \left[\ln(x+1) - \frac{3 \cdot \operatorname{sen}(2\pi x)}{2\pi}\right]_0^2 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

4 **Halla:**

$$\int_0^3 (x^2 - x)\, dx \quad \text{y} \quad \int_0^3 |x^2 - x|\, dx$$

$$\int_0^3 (x^2 - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ -(x^2 - x) & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

$$\int_0^3 |x^2 - x|\, dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\, dx + \int_1^3 (x^2 - x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{x} - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 9 - \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{29}{6}$$

5 **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$ **siendo** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\, dx$ **siendo** $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x \le 3 \end{cases}$

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 (2 - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - 2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\, dx = \int_{-1}^1 x\, dx + \int_1^3 (x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_1^3 = 0 + 12 - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{32}{3}$

Área entre $f(x)$, eje X, $x = a$, $x = b$

6 **a) Calcula:** $\displaystyle\int_{-1}^4 (x^2 + x - 2)\, dx$

b) Halla el área que determina la curva $y = x^2 + x - 2$ **con el eje** X **entre las abscisas –1 y 4.**

a) $\displaystyle\int_{-1}^4 (x^2 + x - 2)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^4 = \frac{64}{3} + \frac{16}{2} - 8 - \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{115}{6}$

b) Los puntos de corte de la curva con el eje X son: $x^2 + x - 2 = 0 \to x = 1,\ x = -2$

De estos dos valores, uno se encuentra en el intervalo $[-1, 4]$ y es $x = 1$.

$$G(x) = \int (x^2 + x - 2)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$$

$$G(-1) = \frac{13}{6};\ G(1) = -\frac{7}{6};\ G(4) = \frac{64}{3}$$

$$\int_{-1}^1 (x^2 + x - 2)\, dx = G(1) - G(-1) = -\frac{7}{6} - \frac{13}{6} = -\frac{10}{3}$$

$$\int_1^4 (x^2 + x - 2)\, dx = G(4) - G(1) = \frac{64}{3} + \frac{7}{6} = \frac{45}{2}$$

Área $= \dfrac{10}{3} + \dfrac{45}{2} = \dfrac{155}{6}$ u^2

7 **Calcula el área comprendida entre la curva $y = 3x^2 - x + 1$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.**

I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $3x^2 - x + 1 = 0$

No tiene soluciones, por lo que no corta al eje X.

II. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

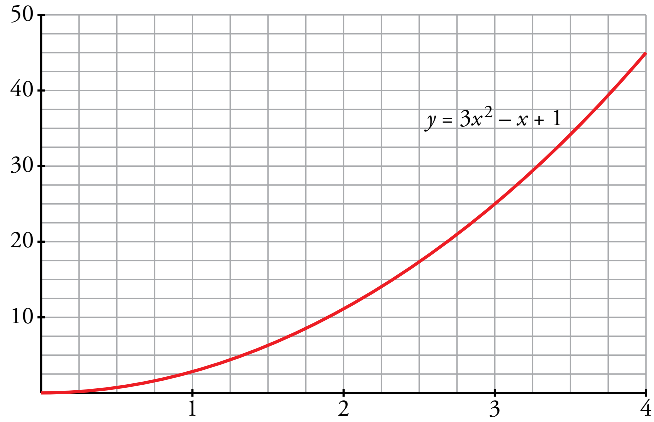
$$G(x) = \int (3x^2 - x + 1)\, dx = x^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $G(0) = 0$, $G(4) = 60$

IV. $G(4) - G(0) = 60$

El área buscada es 60 u^2.

(La gráfica se ha incluido para entender el proceso, pero es innecesaria para obtener el área).



8 **Calcula el área bajo la curva $y = 3x - 2$ entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$.**

I. Hallamos la solución de la ecuación $3x - 2 = 0$. Es $x = \frac{2}{3}$.

II. Ordenamos los extremos del intervalo y la raíz que hay entre ellos: $-1, \frac{2}{3}, 1$.

III. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

$$G(x) = \int (3x - 2)\, dx = \frac{3x^2}{2} - 2x$$

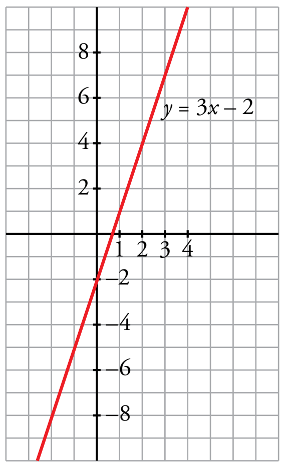
IV. $G(-1) = \frac{7}{2}$; $G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3}$; $G(1) = \frac{-1}{2}$

V. $G\left(\frac{2}{3}\right) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{7}{2} = \frac{-25}{6}$

$G(1) - G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

El área buscada es: $\left|\frac{-25}{6}\right| + \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener su área).



9 **Halla el área bajo la curva $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.**

I. Buscamos la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

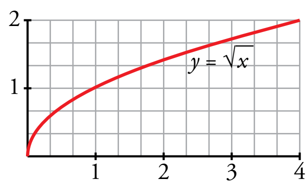
$$G(x) = \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$$

II. $G(0) = 0$, $G(4) = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$

III. $G(4) - G(0) = \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3}$

El área buscada es: $\frac{16}{3}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener su área).



10 **Calcula el área de la región limitada por la curva $y = (x - 1)^2 (x + 1)$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.**

I. Hallamos las soluciones de la ecuación: $(x - 1)^2 (x + 1) = 0$. Son $x = -1$ y $x = 1$.

II. Ordenamos los extremos del intervalo y las raíces que hay entre ellos: –1, 1, 2.

III. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

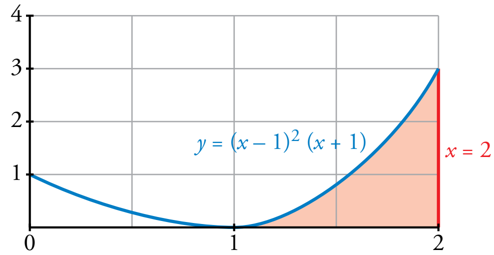
$$G(x) = \int (x-1)^2 (x+1)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

IV. $G(1) = \frac{5}{12}$, $G(2) = \frac{4}{3}$

V. $G(2) - G(1) = \frac{4}{3} - \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$

El área buscada es $\frac{11}{12}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para resolver el ejercicio).



11 **Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \frac{x}{x^2 - 2}$ y las rectas $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.**

I. Hallamos la solución de $\frac{x}{x^2 - 2} = 0$. Es $x = 0$.

II. Como esta solución se encuentra fuera del intervalo de integración, los extremos son 2 y 3.

III. Buscamos la primitiva de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$, la cual es continua en dicho intervalo:

$$G(x) = \int \frac{x}{x^2 - 2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot ln\,|x^2 - 2|$$

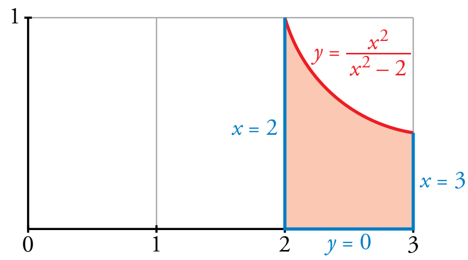
IV. $G(2) = \frac{1}{2} \cdot ln\,(2)$, $G(3) = \frac{1}{2} \cdot ln\,(7)$

V. $G(3) - G(2) = \frac{1}{2} \cdot [ln\,(7) - ln\,(2)]$

El área buscada es:

$$\frac{1}{2} \cdot [ln\,(7) - ln\,(2)] \text{ u}^2.$$

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



Cálculo de un área reconociendo la figura

12 **Las siguientes integrales se pueden calcular reconociendo, en cada caso, la curva cuya ecuación está bajo el signo integral y calculando, utilizando métodos de geometría elemental, el área pedida:**

a) $\int_0^4 2x\, dx$ **b)** $\int_1^5 (x+1)\, dx$ **c)** $\int_0^6 \sqrt{36 - x^2}\, dx$ **d)** $\int_0^3 \sqrt{36 - 4x^2}\, dx$

* ***Recuerda que el área de la elipse de semiejes a y b es $A = \pi ab$.***

a) La recta $y = 2x$, entre $x = 0$ y $x = 4$, limita con el eje X un triángulo. Por tanto:

$$\int_0^4 2x\, dx = \left[x^2\right]_0^4 = \frac{4 \cdot 8}{2}$$

b) La recta $y = x + 1$, entre $x = 1$ y $x = 5$, limita con el eje X un trapecio. Por tanto:

$$\int_1^5 (x+1)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_1^5 = \frac{25}{5} + 5 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{2+6}{2} \cdot 4 = 16$$

c) La curva $y = \sqrt{36 - x^2}$ es una semicircunferencia centrada en el origen, de radio 6 y situada por encima del eje X. La integral pedida es un cuadrante de círculo, por tanto:

$$\int_0^6 \sqrt{36 - x^2}\, dx = \frac{\pi \cdot 6^2}{4} = 9\pi$$

d) $y = \sqrt{36 - 4x^2} \rightarrow 4x^2 + y^2 = 36 \rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

La función es la parte positiva de una elipse que corta a los ejes en (–3, 0); (3, 0) y (0, 6) y la integral pedida es un cuadrante del área encerrada por la elipse.

Por tanto,

$$\int_0^3 \sqrt{36 - 4x^2}\, dx = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 6}{4} = \frac{9\pi}{2}$$

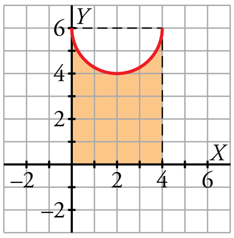
13 Halla gráficamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{5} (x + 2)\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^4 \left[6 - \sqrt{4 - (x - 2)^2}\right] dx$

a) La recta $y = x + 2$, entre $x = -2$ y $x = 5$, limita con el eje X un triángulo. Por tanto:

$$\int_{-2}^{5} (x + 2)\, dx = \frac{7 \cdot 7}{2} = \frac{49}{2}$$

b) Como vemos en la gráfica siguiente, la integral es el resultado de restar al área del rectángulo el área del semicírculo de radio 2.



$$\int_0^4 \left(6 - \sqrt{4 - (x - 2)^2}\right) dx = 4 \cdot 6 - \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 24 - 2\pi$$

Área entre dos curvas

14 Halla, en cada caso, el área comprendida entre los siguientes pares de parábolas:

a) $y = x^2 - 5$ **e** $y = -x^2 + 5$

b) $y = x^2$ **e** $y^2 = x$

a) I. Buscamos las soluciones de $x^2 - 5 = -x^2 + 5$. Son $x = -\sqrt{5}$ y $x = \sqrt{5}$

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Se obtiene la función diferencia:

$y = (-x^2 + 5) - (x^2 - 5) = -2x^2 + 10$

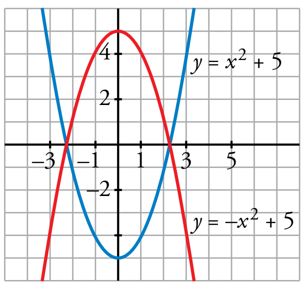
III. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int (-2x^2 + 10)\, dx = \frac{-2x^3}{3} + 10x$$

IV. $G(\sqrt{5}) - G(-\sqrt{5}) = \dfrac{20}{3}\sqrt{5} + \dfrac{20}{3}\sqrt{5} = \dfrac{40}{3}\sqrt{5}$

El área buscada es: $\dfrac{40}{3}\sqrt{5}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener el área).



b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x = x^4$. Son $x = 0$ y $x = 1$.

II. Calculamos la función diferencia: $y = x^2 - \sqrt{x}$

III. Buscamos su primitiva:

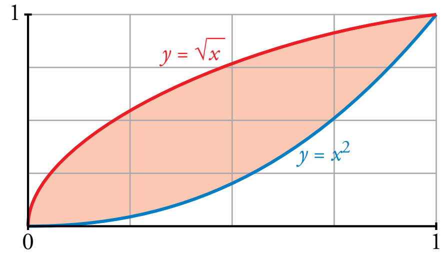
$$G(x) = \int (x^2 - \sqrt{x})\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

IV. $G(0) = 0,\ \ G(1) = \dfrac{-1}{3}$

V. $G(1) - G(0) = \dfrac{-1}{3} - 0 = \dfrac{-1}{3}$

El área buscada es $\left|\dfrac{-1}{3}\right| = \dfrac{1}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para la resolución del ejercicio).



15 **Calcula el área comprendida entre las curvas dadas en cada uno de los ejercicios siguientes:**

a) $y = 4 - x^2;\ \ y = 8 - 2x^2$

b) $y = x^2;\ \ y = 4 - x^2$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x;\ \ y = x$

d) $y = x(x - 1)(x - 2);\ \ y = 0$

e) $y = x^2;\ \ y = 1$

f) $y = x^2 - 2x;\ \ y = -x^2 + 4x$

g) $y = -x^2 + 4x - 4;\ \ y = 2x - 7$

a) I. Buscamos las soluciones de $4 - x^2 = 8 - 2x^2$. Son $x = -2$ y $x = 2$.

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$y = (8 - 2x^2) - (4 - x^2) = 4 - x^2$

III. Calculamos su primitiva:

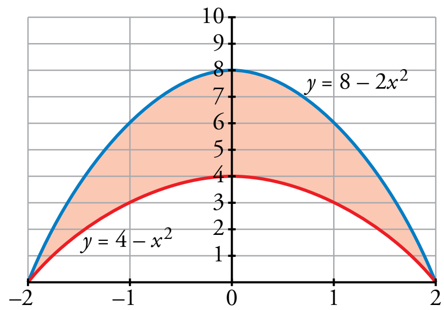
$$G(x) = \int (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

IV. $G(-2) = -8 + \dfrac{8}{3} = -\dfrac{16}{3}$

$G(2) = 8 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$

V. $G(2) - G(-2) = \dfrac{16}{3} - \left(-\dfrac{16}{3}\right) = \dfrac{32}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{32}{3}$ u^2.



b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 4 - x^2$. Son $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$ (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$y = (4 - x^2) - x^2 = 4 - 2x^2$

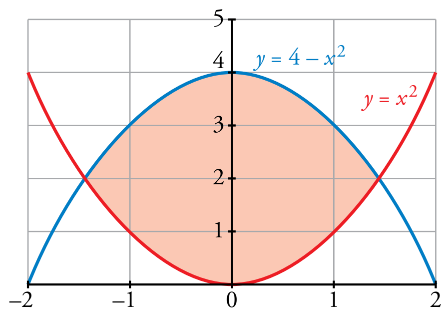
III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (4 - 2x^2)\,dx = 4x - \frac{2x^3}{3}$$

IV. $G(-\sqrt{2}) = \dfrac{-8\sqrt{2}}{3},\ \ G(\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

V. $G(\sqrt{2}) - G(-\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3} + \dfrac{8\sqrt{2}}{3} = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ u^2.



(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para hallar el área).

c) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^3 - 3x^2 + 3x = x$. Son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

II. Calculamos la función diferencia: $y = (x^3 - 3x^2 + 3x) - x = x^3 - 3x^2 + 2x$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

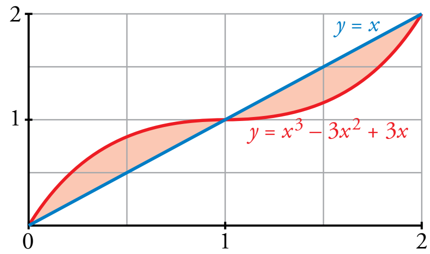
IV. $G(0) = 0$, $G(1) = \frac{1}{4}$, $G(2) = 0$

$$G(1) - G(0) = \frac{1}{4}$$

$$G(2) - G(1) = \frac{-1}{4}$$

El área buscada es: $\frac{1}{4} + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{2}$ u^2.

(La gráfica que se adjunta es para entender mejor el ejercicio, pero es innecesaria para obtener el área).



d) I. Buscamos las soluciones de: $x(x-1)(x-2) = 0$. Son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

II. Calculamos la función diferencia: $y = x(x-1)(x-2)$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int x(x-1)(x-2)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Resulta que se trata del mismo ejercicio que el apartado c).

El área buscada es: $\frac{1}{2}$ u^2.

e) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 1$. Son $x = -1$ y $x = 1$.

II. Calculamos la función diferencia: $y = x^2 - 1$

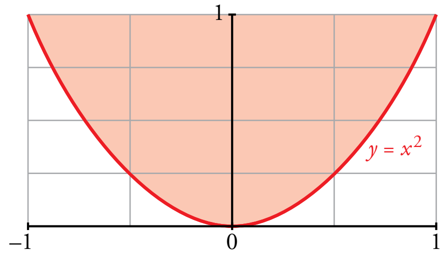
III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^2 - 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x$$

IV. $G(-1) = \frac{2}{3}$, $G(1) = \frac{-2}{3}$

V. $G(1) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{3}$

El área buscada es: $\left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3}$ u^2.



(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para resolver el ejercicio).

f) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 - 2x = -x^2 + 4x$. Son $x = 0$ y $x = 3$.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (x^2 - 2x) - (-x^2 + 4x) = 2x^2 - 6x$$

III. Calculamos su primitiva:

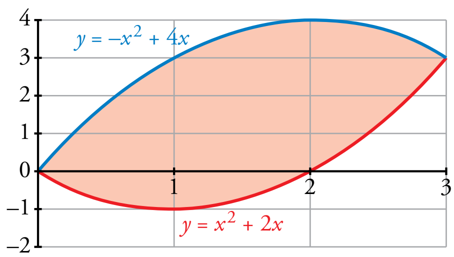
$$G(x) = \int (2x^2 - 6x)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 3x^2$$

IV. $G(0) = 0$, $G(3) = -9$

V. $G(3) - G(0) = -9$

El área buscada es: $|-9| = 9$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria).



g) I. Buscamos las soluciones de: $-x^2 + 4x - 4 = 2x - 7$, Son $x = -1$ y $x = 3$.

II. Calculamos la función diferencia:

$y = (-x^2 + 4x - 4) - (2x - 7) = -x^2 + 2x + 3$

III. Calculamos su primitiva:

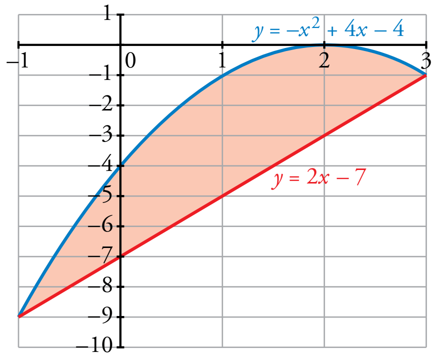
$$G(x) = \int (-x^2 + 2x + 3)\,dx = \frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x$$

IV. $G(-1) = \frac{-5}{3}$, $G(3) = 9$

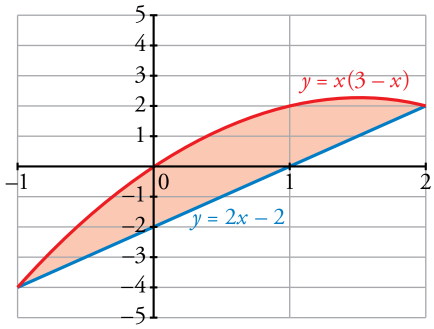
V. $G(3) - G(-1) = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}$

El área buscada es: $\frac{32}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



16 **Dibuja y halla el área de la región limitada por la curva $y = x(3 - x)$ y la recta $y = 2x - 2$.**



I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x(3 - x) = 2x - 2$. Son $x = -1$ y $x = 2$.

II. Calculamos la función diferencia: $f(x) = x(3 - x) - (2x - 2) = -x^2 + x + 2$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (-x^2 + x + 2)\,dx = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x$$

IV. $G(-1) = \frac{-7}{6}$, $G(2) = \frac{10}{3}$

V. $G(2) - G(-1) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}$

El área buscada es $\frac{9}{2}$ u^2.

17 **Dibuja el recinto plano limitado por la parábola $y^2 - x = 1$ y por la recta paralela a $y = x$ que pasa por el punto (1, 0). Calcula el área de ese recinto.**

- Recta paralela a $y = x$ que pasas por (1, 0):

$$\left.\begin{array}{l} m = 1 \\ P(1, 0) \end{array}\right\} \; y = 1(x - 1) = x - 1$$

- Buscamos los puntos de corte de la curva $y^2 - x = 1$ y la recta $y = x - 1$:

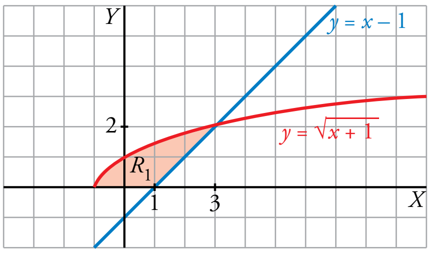
$$\left.\begin{array}{l} y^2 - x = 1 \;\to\; x = y^2 - 1 \\ y = x - 1 \;\to\; x = y + 1 \end{array}\right\} \; y^2 - 1 = y + 1 \;\to\; y^2 - y - 2 = 0 \; \begin{array}{l} y = -1 \;\to\; x = 0 \\ y = 2 \;\to\; x = 3 \end{array}$$

- Representamos el recinto y lo descomponemos en dos partes:

$R_1 \to$ limitado por $y = \sqrt{x + 1}$, eje OX y la recta $y = x - 1$

$R_2 \to$ limitado por $y = -\sqrt{x + 1}$, eje OX y la recta $y = x - 1$

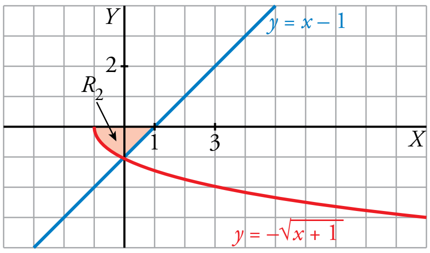
Calculamos en primer lugar el área de R_1:



$$A_{R_1} = \int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\, dx - \int_{1}^{3} (x-1)\, dx = \left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^{3} - \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{3} =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_{-1}^{3} - \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{3} = \frac{2}{3} \cdot 8 - \left[\left(\frac{9}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$$

Calculamos ahora el área de R_2:



$$A_{R_2} = -\int_{-1}^{0} -\sqrt{x+1}\, dx + \int_{0}^{1} (1-x)\, dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \text{ u}^2$$

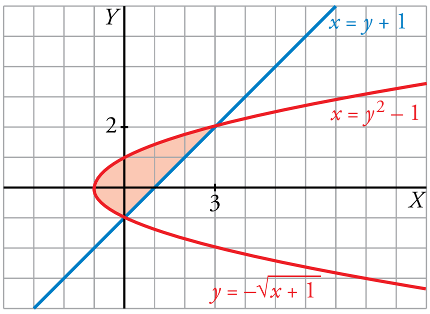
Área total: $R_1 + R_2 = \dfrac{10}{3} + \dfrac{7}{6} = \dfrac{9}{2}$ u^2

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $y^2 - 1 = y + 1$

(Esta ecuación resulta de despejar la x en: $y^2 - x = 1$; $y = x - 1$).

Sus soluciones son $y = -1$, $y = 2$.



II. Calculamos la función diferencia:

$$x = (y^2 - 1) - (y + 1) = y^2 - y - 2$$

III. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int (y^2 - y - 2)\, dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y$$

IV. $G(-1) = \dfrac{7}{6}$ $G(2) = \dfrac{-10}{3}$

V. $G(2) - G(-1) = \dfrac{-10}{3} - \dfrac{7}{6} = \dfrac{-9}{2}$

El área buscada es $\left|\dfrac{-9}{2}\right| = \dfrac{9}{2}$ u^2.

18 Halla el área limitada por la función $y = 2x - x^2$ y sus tangentes en los puntos en los que su gráfica corta al eje de abscisas.

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $2x - x^2 = 0$. Son $x = 0$ y $x = 2$.

II. Calculamos la derivada de $f(x) = 2x - x^2$, que es $f'(x) = 2 - 2x$.

La tangente que pasa por (0, 0) tiene pendiente $f'(0) = 2$; por tanto, es $y = 2x$.

La tangente que pasa por (2, 0) tiene pendiente $f'(2) = -2$; por tanto, es $y = -2x + 4$.

III. Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: entre 0 y 1 y entre 1 y 2.

La función diferencia en el primer intervalo es:

$$f_1(x) = 2x - (2x - x^2) = x^2$$

y en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = -2x + 4 - (2x - x^2) = x^2 - 4x + 4$$

IV. Sus primitivas son:

$$G_1(x) = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

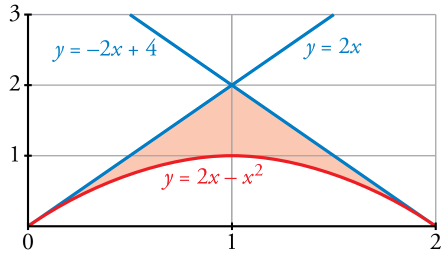
$$G_1(x) = \int (x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

V. $G_1(0) = 0$, $G_1(1) = \dfrac{1}{3}$, $G_1(1) - G_1(0) = \dfrac{1}{3}$

$G_2(1) = \dfrac{7}{3}$, $G_2(2) = \dfrac{8}{3}$, $G_2(2) - G_2(1) = \dfrac{1}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



Página 380

19 Dadas la hipérbola $xy = 6$ y la recta $x + y - 7 = 0$, calcula el área comprendida entre ellas.

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $7 - x = \dfrac{6}{x}$. Son $x = 1$ y $x = 6$ (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = 7 - x - \frac{6}{x}$$

III. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int \left(7 - x - \frac{6}{x}\right) = 7x - \frac{x^2}{2} - 6ln\,|x|$$

IV. $G(1) = 7 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{2}$

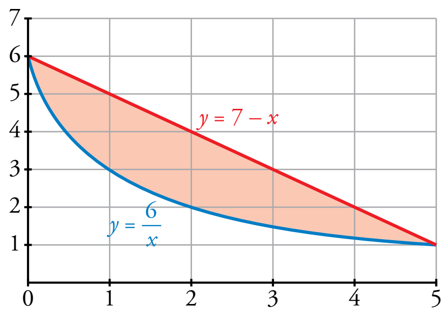
$G(6) = 24 - 6ln\,(6)$

V. $G(6) - G(1) = 24 - 6ln\,(6) - \dfrac{13}{2} = \dfrac{35}{2} - 6ln\,(6)$

El área buscada es:

$$\frac{35}{2} - 6ln\,(6)\ \text{u}^2$$

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



20 **Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.**

I. Calculemos la ecuación de la recta tangente en el punto (0, 0); para ello, calculamos la derivada de nuestra función:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$y(0) = 1 \text{ (pendiente)}$$

La recta tangente tiene por ecuación $y = x$.

II. Calculamos las soluciones de: $x^3 - 2x^2 + x = x$. Son $x = 0$ y $x = 2$ (límites de integración).

III. Obtenemos la función diferencia:

$$y = x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2$$

IV. Buscamos su primitiva:

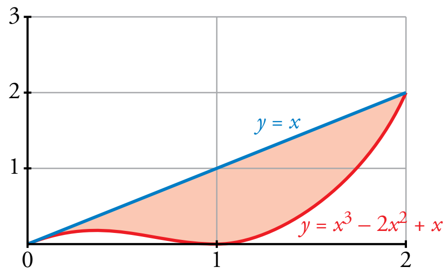
$$G(x) = \int (x^3 - 2x^2)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$$

V. $G(0) = 0$, $G(2) = \dfrac{-4}{3}$

$$G(2) - G(0) = \frac{-4}{3}$$

El área buscada es: $\left|\dfrac{-4}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica aunque no es necesaria para la resolución del ejercicio).



21 **Halla el área encerrada por la curva $y = \ln x$ entre el punto de corte con el eje X y el punto de abscisa $x = e$.**

La curva $y = \ln x$ corta al eje X en el punto de abscisa $x = 1$.

$$\text{Área} = \int_1^e \ln x\, dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \ln x \ \rightarrow\ du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ dv = dx \ \rightarrow\ v = x \end{cases}$$

$$G(x) = \int \ln x\, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$$

$$\text{Área} = \int_1^e \ln x\, dx = G(e) - G(1) = 0 - (-1) = 1 \text{ u}^2$$

22 **Halla el área limitada por las gráficas de las funciones que se indican.**

a) $f(x) = x^3 + x^2$	$g(x) = x^3 + 1$	**b)** $f(x) = x^2$	$g(x) = 1 - x^2$	$y = 2$
c) $f(x) = x(x-1)(x-4)$	$g(x) = 0$	**d)** $f(x) = x^2 - 2x$	$g(x) = x$	
e) $f(x) = x^3 - x$	$g(x) = -x^2$	**f)** $f(x) = 2 - x^4$	$g(x) = x^2$	

a) Calculamos las abscisas de los puntos de corte de las dos curvas:

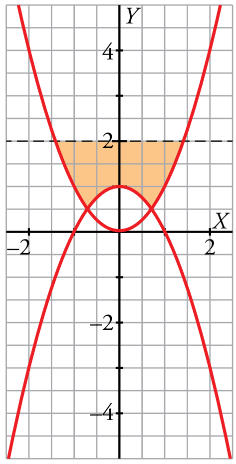
$$f(x) = g(x) \ \rightarrow\ x^3 + x^2 = x^3 + 1 \ \rightarrow\ x^2 - 1 = 0 \ \rightarrow\ x = -1,\ x = 1$$

Llamamos la integral de $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 1$

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^1 = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

Área $= \dfrac{4}{3}$ u^2

b) Calculamos las abscisas de los puntos de corte:



$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \to x = -\sqrt{2},\ x = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 1 - x^2 \end{array}\right\} \to x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Utilizamos la simetría respecto del eje vertical:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [2 - (1 - x^2)]\, dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)\, dx = \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} = \left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left[\sqrt{2} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3}\right] = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Área} = 2\left(\frac{7\sqrt{2}}{12} + \frac{5\sqrt{2}}{12}\right) = 2\sqrt{2}\ \text{u}^2$$

c) $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en los puntos de abscisas $x = 0,\ x = 1,\ x = 4$.

Llamamos $h(x) = f(x) - g(x) = x(x-1)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 4x$

$$H(x) = \int (x^3 - 5x^2 + 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 2x^2$$

$$H(0) = 0;\ H(1) = \frac{7}{12};\ H(4) = -\frac{32}{3}$$

$$\int_0^1 (x^3 - 5x^2 + 4x)\, dx = H(1) - H(0) = \frac{7}{12}$$

$$\int_1^4 (x^3 - 5x^2 + 4x)\, dx = H(4) - H(1) = -\frac{32}{3} - \frac{7}{12} = -\frac{45}{4}$$

$$\text{Área} = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6}\ \text{u}^2$$

d) $$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ y = x \end{array}\right\} \to x = 0,\ x = 3$$

$$\int_0^3 (x^2 - 2x - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = 9 - \frac{27}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{9}{2}\ \text{u}^2$$

e) $$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - x \\ y = -x^2 \end{array}\right\} \to x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2},\ x = 0,\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$G(x) = \int [x^3 - x - (-x^2)]\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$G\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)^4}{4} + \frac{\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2}{2} = \frac{-5\sqrt{5} - 13}{24};\ G(0) = 0$$

$$G\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^4}{4} + \frac{\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2}{2} = \frac{5\sqrt{5} - 13}{24}$$

$$\int_{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (x^3 + x^2 - x)\, dx = G(0) - G\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{5}+13}{24}$$

$$\int_{0}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (x^3 + x^2 - x)\, dx = G\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) - G(0) = \frac{5\sqrt{5}-13}{24}$$

$$\text{Área} = \frac{5\sqrt{5}+13}{24} + \frac{-5\sqrt{5}+13}{24} = \frac{13}{12}\ \text{u}^2$$

f) $\left.\begin{array}{l} y = 2 - x^4 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \rightarrow\ x = -1,\ x = 1$

$$\int_{-1}^{1} (2 - x^4 - x^2)\, dx = \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 2 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 2\right) = \frac{44}{15}$$

$$\text{Área} = \frac{44}{15}\ \text{u}^2$$

Volúmenes

23 **Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos siguientes:**

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ **entre** $x = 1$ **y** $x = 5$

b) $f(x) = x^2$ **entre** $x = -1$ **y** $x = 2$

c) $f(x) = x - x^2$ **entre** $x = 0$ **y** $x = 1$

a) $V = \pi \cdot \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2\, dx = \pi \cdot \int_1^5 (x-1)\, dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5 = 8\pi\ \text{u}^3$

b) $V = \pi \cdot \int_{-1}^{2} (x^2)^2\, dx = \pi \cdot \int_{-1}^{2} x^4\, dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{31}{5}\pi\ \text{u}^3$

c) $V = \pi \cdot \int_0^1 (x - x^2)^2\, dx = \pi \cdot \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\, dx = \pi\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{30}\ \text{u}^3$

24 **Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos limitados por las gráficas que se indican:**

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

b) $y^2 = 4x$, $x = 4$

a) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $\sqrt{x} = x^2$. Son $x = 0$ y $x = 1$.

Estos son nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = \sqrt{x} - x^2$$

III. $V = \pi \cdot \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\, dx = \pi \cdot \int_0^1 (x - x^4)\, dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{10}\pi\ \text{u}^3$

b) $V = \pi \cdot \int_0^4 f(x)^2\, dx = \pi \cdot \int_0^4 (4x)^2\, dx = \pi \cdot \left[8x^2\right]_0^4 = 128\pi\ \text{u}^3$

Función integral

25 Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $F(x) = \int_0^x \cos t \, dt$ b) $G(x) = \int_3^x (t^2+1)^4 \, dt$

c) $H(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt$ d) $J(x) = \int_3^5 (t^2+1)^4 \, dt$

¡Atención! La última es la más fácil.

a) $F'(x) = \cos x$

b) $F'(x) = (x^2+1)^4$

c) $H'(x) = e^{-x^2}$

d) $J'(x) = 0$, porque $J(x)$ es constante.

Para resolver

26 Halla el área comprendida entre la curva:

$$y = \frac{4}{9+2x^2}$$

el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

I. Buscamos los puntos de inflexión; para ello, calculamos las dos primeras derivadas:

$$y' = \frac{-16x}{(9+2x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{-16 \cdot (9+2x^2-8x^2)}{(9+2x^2)^3}$$

Igualamos a cero para encontrar en qué valores de x la segunda derivada es cero.

Esto ocurre en $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ y $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (puntos de inflexión).

II. Calculamos la primitiva de nuestra función:

$$G(x) = \int \frac{4}{9+2x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \, arc\, tg \left(\frac{\sqrt{2}x}{3} \right)$$

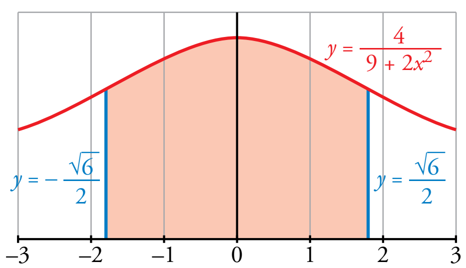
III. $G\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \, arc\, tg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \, arc\, tg \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) - G\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(arc\, tg \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc\, tg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right)$

El área buscada es: $\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(arc\, tg \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc\, tg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right)$

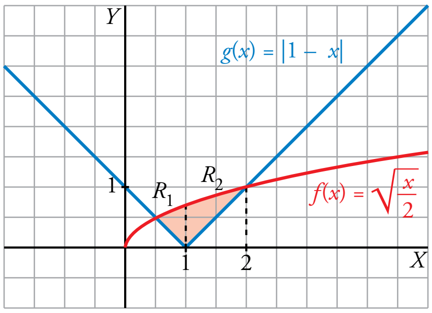
(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



27 Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$ y $g(x) = |1 - x|$:

a) Dibuja las dos gráficas sobre unos mismos ejes y halla sus puntos de intersección.

b) Determina el área del recinto encerrado entre ambas gráficas.



a) Definimos $g(x)$ por intervalos: $g(x) = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Buscamos los puntos de intersección resolviendo la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = (1 - x) \quad \text{o bien} \quad \sqrt{\frac{x}{2}} = (x - 1)$$

Al elevar al cuadrado cualquiera de las dos ecuaciones, llegamos a:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \;\to\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \begin{cases} x = 2 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

Sus soluciones son $\frac{1}{2}$ y 2 (límites de integración).

b) Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: de $\frac{1}{2}$ a 1 y de 1 a 2, porque en $x = 1$ cambia la definición de $g(x)$.

Tenemos, por tanto, dos recintos de integración, R_1 y R_2.

I. La función diferencia en el primer intervalo es:

$$h_1(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - (1 - x)$$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$h_2 = \sqrt{\frac{x}{2}} - (x - 1)$$

II. Sus primitivas son:

$$H_1(x) = \int\left(\sqrt{\frac{x}{2}} + x - 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 + \frac{x^2}{2} - x$$

$$H_2(x) = \int\left(\sqrt{\frac{x}{2}} - x + 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $H_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{24}$; $H_1(1) = \frac{2\sqrt{2} - 3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

$H_2(1) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$; $H_2(2) = \frac{4}{3}$

IV. Área del recinto R_1: $H_1(1) - H_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24}$

Área del recinto R_2: $H_2(2) - H_2(1) = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

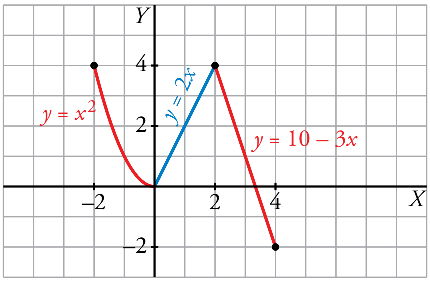
El área buscada es $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24} + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$ u^2.

28 **Se considera la función:**

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 10 - 3x & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Representa la función g y calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

$$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx \qquad J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx \qquad K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx$$

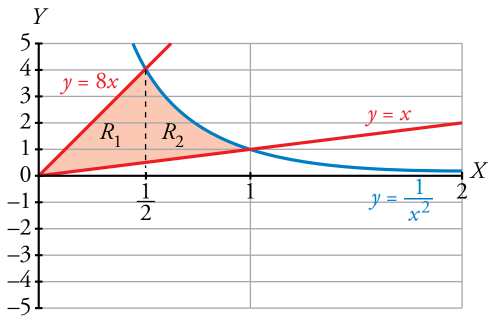


$$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{1} 2x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[x^2\right]_0^1 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

$$J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx = \int_{1}^{2} 2x\,dx + \int_{2}^{4} (10 - 3x)\,dx = \left[x^2\right]_1^2 + \left[10x - \frac{3x^2}{2}\right]_2^4 = 5$$

$$K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx = I + J = \frac{11}{3} + 5 = \frac{26}{3}$$

29 **Dibuja el recinto comprendido entre las gráficas de las funciones $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x$, $y = 8x$, y halla su área.**



I. Buscamos los puntos de intersección de las funciones:

$$\frac{1}{x^2} = x \;\to\; x^3 = 1. \text{ Su solución es } x = 1.$$

$$\frac{1}{x^2} = 8x \;\to\; 8x^3 = 1 \;\to\; x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}. \text{ Su solución es } x = \frac{1}{2}.$$

$$x = 8x \;\to\; 7x = 0. \text{ Su solución es } x = 0.$$

Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a $\frac{1}{2}$ y de $\frac{1}{2}$ a 1. Corresponden a los recintos R_1 y R_2 señalados en el gráfico.

II. Hallamos la función diferencia en el primer intervalo:

$$f_1(x) = 8x - x = 7x$$

Y en el segundo intervalo:

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} - x$$

III. Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \int 7x\, dx = \frac{7x^2}{2}$$

$$G_2(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} - x\right) dx = \frac{-1}{x} - \frac{x^2}{2}$$

IV. $G_1(0) = 0, \quad G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-17}{8}, \quad G_2(1) = \frac{-3}{2}$$

V. Área de R_1: $G\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(0) = \frac{7}{8}$

Área de R_2: $G_2(1) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$

El área buscada es $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ u^2.

30 Calcula el área del recinto plano limitado por la curva $y = x^2 e^x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.

Buscamos una primitiva a nuestra función:

$$G(x) = \int x^2 \; e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2)\, e^x$$

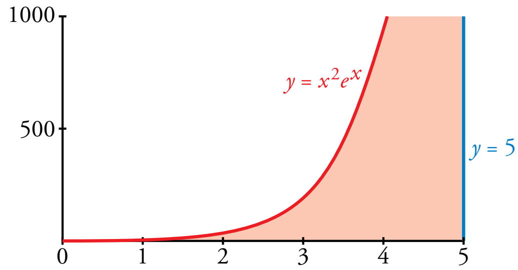
(aplicando el método de integración por partes).

$$G(0) = 2$$

$$G(5) = 17e^5$$

$$G(5) - G(0) = 17e^5 - 2$$

El área buscada es $(17e^5 - 2)$ u^2.



(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).

31 Dada la curva $y = x^2 + 2x + 2$, halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6.

Buscamos el punto donde la curva tiene un extremo, hallando su derivada e igualando a cero:

$y' = 2x + 2 = 0$, el punto es $(-1, 1)$.

La ecuación de la recta tangente en dicho punto es $y = 1$.

Por otro lado, la ecuación de la recta tangente con pendiente 6 es $y = 6x - 2$.

Buscamos los puntos de corte de la curva con ambas rectas, de $y = x^2 + 2x + 2$ con $y = 1$ es $(-1, 1)$; de $y = x^2 + 2x + 2$ con $y = 6x - 2$ es $(2, 10)$; y de $y = 1$ con $y = 6x - 2$ es $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Distinguimos dos intervalos de integración: de -1 a $\frac{1}{2}$ y de $\frac{1}{2}$ a 2.

En el primer intervalo la función diferencia es:

$$f_1(x) = x^2 + 2x + 2 - 1 = x^2 + 2x + 1$$

En el segundo:

$$f_2(x) = x^2 + 2x + 2 - (6x - 2) = x^2 - 4x + 4$$

Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

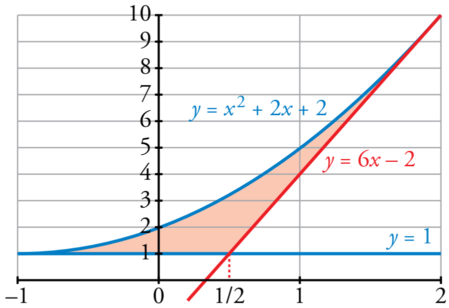
$$G_1(-1) = \frac{-1}{3},\ G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{24}$$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{24},\ G_2(2) = \frac{8}{3}$$

$$G_1\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(-1) = \frac{19}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{8}$$

$$G_2(2) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} - \frac{37}{24} = \frac{9}{8}$$

El área buscada es: $\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$ u^2.



32 Halla el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa alrededor de OX.

$$V = \pi \int_{-5}^{5} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}\right)^2 dx = \pi \int_{-5}^{5} \left(1 - \frac{x^2}{25}\right) dx = \pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{75}\right]_{-5}^{5} = \frac{20\pi}{3} \text{ u}^3$$

33 Calcula el área limitada por $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, siendo a y b las abscisas del máximo y el mínimo de f.

La función corta al eje X en $x = 0$.

Por otro lado, tiene un mínimo en $x = -2$ y un máximo en $x = 2$.

Tenemos que distinguir entre dos intervalos: de –2 a 0 y de 0 a 2.

Hallamos la función primitiva:

$$G(x) = \int \frac{4x}{x^2 + 4} dx = 2ln(x^2 + 4)$$

El área en el primer intervalo es:

$G(-2) = = 2ln\ 8$

$G(0) = 2ln\ 4$

$G(0) - G(-2) = 2(ln\ 4 - ln\ 8)$

$|2(ln\ 4 - ln\ 8)| = 2(ln\ 8 - ln\ 4)$ u^2

El área en el segundo intervalo es:

$G(2) = 2ln\ 8$

$G(2) - G(0) = 2(ln\ 8 - ln\ 4)$

$2(ln\ 8 - ln\ 4)$ u^2

El área total es:

$2(ln\ 8 - ln\ 4) + 2(ln\ 8 - ln\ 4) = 4(ln\ 8 - ln\ 4)$ u^2