

Unidad 15 – Integrales definidas. Aplicaciones

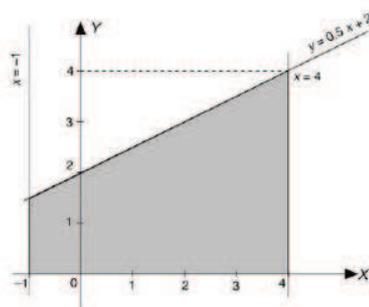
PÁGINA 363

cuestiones iniciales

1. Calcula el área del recinto limitado por la recta $y = 0,5x + 2$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 4$.
2. Halla el área de la región limitada por la curva de ordenadas negativas $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ y el eje OX .

SOLUCIONES

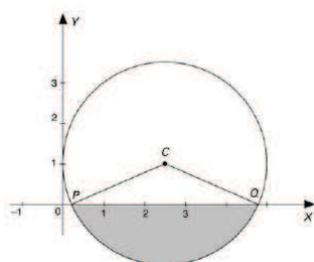
1. La solución:



Lo que nos pide el problema es hallar el área del recinto rayado. Este recinto es un trapecio y su área es:

$$\text{Área} = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{4 + 1,5}{2} \cdot 5 = 13,7$$

2. Queda:



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 &= 0 \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 &= 9 \end{aligned}$$

La curva es una circunferencia de centro $C(3, 1)$ y radio 3 unidades.
La circunferencia corta al eje OX en los puntos $P(0,17;0)$ y $Q(5,83;0)$.
El área de la zona sombreada vale:

$$\frac{9\pi \cdot 141,058}{360} - \frac{1}{2} \cdot 5,66 \cdot 1 = 8,29 \text{ u}^2$$

ACTIVIDADES

■ Utiliza el principio de distribución de Dirichlet en la resolución de los problemas que siguen.

1. **Iniciales repetidas.** ¿Cuántos habitantes debe tener una ciudad para asegurar que hay al menos dos habitantes cuyas tres iniciales, del nombre y de los dos apellidos, coinciden? Suponemos que sólo se considera el primer nombre propio y 26 letras del alfabeto.
2. **Correspondencia.** Diecisiete personas mantienen correspondencia por carta, cada una con todas las demás. En sus cartas solamente tratan 3 temas. Cada par de personas trata en sus cartas sólo uno de estos temas. Demuestra que hay, al menos, 3 personas que se escriben sobre el mismo tema.

SOLUCIONES

1. Puesto que tanto el nombre de pila como los dos apellidos pueden comenzar por cualquiera de las 26 letras del alfabeto, por el principio de multiplicación de la combinatoria tenemos $26 \cdot 26 \cdot 26 = 17576$, conjuntos ordenados distintos de tres iniciales.

Por el principio de distribución, el número mínimo de habitantes necesarios para garantizar que existen dos con las mismas iniciales será 17 577.

En esta situación los nidos son $r = 17576$, es decir, los conjuntos ordenados distintos de tres iniciales; y las palomas son el número mínimo de habitantes, $n = 17577$.

2. Seleccionaremos una persona, digamos A. Mantiene correspondencia con las 16 restantes. Como solamente hay tres temas, según el principio del palomar, debe escribirse al menos con seis de ellas sobre el mismo tema.

Para fijar ideas, supongamos que A se escribe al menos con 6 de las restantes 16 sobre el tema I. Si alguna de estas seis se escribe con otra sobre el tema I, entonces ya hay tres escribiéndose sobre el tema I.

Supongamos que estas seis personas se escriben sobre los temas II y III. Si B es una de estas seis, entonces, por el principio del palomar, debe escribirse al menos con tres de las otras 5 sobre uno de los dos temas, por ejemplo el tema II.

Ahora hay dos posibilidades para estas últimas tres personas. Si alguna se escribe con otra sobre el tema II, ya hemos encontrado tres personas que se escriben sobre el tema II. Si, por el contrario, ninguna de las tres se escribe con las otras sobre el tema II, entonces las tres deben escribirse entre sí sobre el tema III, con lo que está probada la afirmación del enunciado.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Se considera la función $f(x) = 16 - x^2$ en el intervalo $I = [-1, 4]$ y la partición de dicho intervalo dada por $P = \{-1, 0, 2, 4\}$. Encuentra de forma razonada el valor de las sumas superior e inferior correspondientes a f y a dicha partición P .
- 2. Una partición creciente verifica que $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ y $f(3) = 10$. Halla de forma razonada la suma superior y la inferior correspondientes a la función f en el intervalo $[1, 3]$ respecto a la partición $P = \{1, 2, 3\}$.

- 3. Haciendo uso del teorema del valor medio, resuelve las siguientes cuestiones:

- a) Halla el valor medio de $f(x) = x^2 + 3$ en el intervalo $(0, 3)$ y halla el punto en el que se alcanza.
- b) Halla el valor medio de $f(x) = -x^2 + 2x$ en el intervalo $(0, 2)$. Halla los puntos en que se alcanza este valor. ¿Existirán dos puntos donde se alcanza el valor medio, ¿contradice el teorema del valor medio?

c) ¿Es aplicable el teorema citado a la integral $\int_{-1}^1 f(x) dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$?

- d) Calcula $\int_2^4 f(x) dx$ siendo $f(x) = 2x^2 - 3x$, y determina el valor medio de f en el intervalo $(2, 4)$, así como el valor de c correspondiente.

- 4. Obtén la derivada de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$$

$$H(x) = \int_0^x t^2 dt$$

$$J(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{3+t} dt$$

$$G(x) = \int_{-3}^x |t+2| dt$$

$$I(x) = \int_x^{x^3} \frac{e^t}{t^2+1} dt$$

$$K(x) = \int_x^{2x} \ln(t^2+4) dt$$

- 5. Haciendo uso del teorema fundamental del cálculo integral, resuelve las cuestiones siguientes:

a) Para la función $F(x) = \int_0^{2x} e^{t^2} dt$, calcula $F'(0)$.

b) Encuentra los extremos de la función $F(x) = \int_1^x \ln t dt$ en el intervalo $[2, 10]$.

c) Halla el punto de $[0, 2]$ en el que la función $F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{1+t^2} dt$ alcanza su mínimo.

d) Para $F(x) = \int_0^{\sin x} \arcsen t dt$, calcula $F'(x)$.

e) Para $G(x) = \int_1^x e^{-t^2} (1+t^2) dt$, halla $G'(x)$.

f) La función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, ¿tiene puntos de inflexión? En caso afirmativo halla las abscisas de estos puntos.

g) Calcula $\int_x^{x^2} e^{t^2} dt$.



SOLUCIONES

1. La suma superior es:

$$s(P) = (0 - (-1)) \cdot 16 + (2 - 0) \cdot 16 + (4 - 2) \cdot 12 = \\ = 16 + 32 + 24 = 72.$$

La suma inferior es:

$$s(P) = (0 - (-11)) \cdot 15 + (2 - 0) \cdot 12 + (4 - 2) \cdot 0 = \\ = 15 + 24 + 0 = 39$$

2. La suma superior es:

$$s(P) = (2-1) \cdot 3 + (3-2) \cdot 10 = 3 + 10 = 13$$

La suma inferior es:

$$s(P) = (2-1) \cdot 1 + (3-2) \cdot 3 = 1 + 3 = 4$$

3. La solución es:

$$a) \int_0^3 (x^2 + 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x \right]_0^3 = 18$$

El teorema del valor medio dice que $\exists c \in (0, 3)$ tal que:

$$\int_0^3 (x^2 + 3) dx = (c^2 + 3) \cdot (3 - 0) \Rightarrow 3c^2 + 9 = 18 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}$$

Por tanto, como $c \in (0, 3)$, el valor pedido es $c = \sqrt{3}$

$$b) \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

El teorema del valor medio dice que $\exists c \in (0, 2)$ tal que

$$\int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = (-c^2 + 2c) \cdot (2 - 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow -2c^2 + 4c = \frac{4}{3} \Rightarrow 6c^2 - 12c + 4 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3c^2 - 6c + 2 = 0 \Rightarrow c = 1,58; c = 0,42$$

Obtenemos dos valores de C, pero esto no contradice el teorema, ya que este teorema garantiza que exista un valor pero no dice que este valor sea único.

c) no es aplicable el teorema del valor medio ya que la función $y=f(x)$ no es continua en el intervalo $[-1, 1]$, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int_2^4 f(x) dx &= \int_2^4 (2x^2 - 3x) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_2^4 = \\ &= 18,6 - (-0,6) = 19,3 = \frac{58}{3} \end{aligned}$$

Por el teorema de la media:

$$\int_2^4 f(x) dx = f(c)(4 - 2) \text{ con } c \in (2, 4) \Rightarrow f(c) = \frac{29}{3}$$

$$y \frac{58}{3} = (2c^2 - 3c) \cdot 2 \Rightarrow 12c^2 - 18c - 58 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 2784}}{24} = \frac{18 \pm 55,75}{24} = \left\{ \begin{array}{l} 3,07 \\ -1,57 \end{array} \right.$$

Por tanto, $c = 3,07 \in (2, 4)$.

4. La solución es:

$$F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt \Rightarrow F'(x) = e^{\cos x}$$

$$G(x) = \int_0^x t^2 dt \Rightarrow G'(x) = x^2$$

$$H(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{3+t} dt \Rightarrow H'(x) = \frac{1}{3+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{3+x^2}$$

$$I(x) = \int_{-3}^x |t+2| dt \Rightarrow I'(x) = (x+2)$$

$$J(x) = \int_2^{x^2} \frac{e^t}{t^2+1} dt \Rightarrow J'(x) = \frac{e^{x^2}}{x^6+1} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2 \cdot e^{x^2}}{x^6+1}$$

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_x^{x^2} \ln(t^2+4) dt = \int_x^a \ln(t^2+4) dt + \\ &+ \int_a^{x^2} \ln(t^2+4) dt = -\int_a^x \ln(t^2+4) dt + \int_a^{x^2} \ln(t^2+4) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^x -\ln(t^2+4) dt + \int_a^{x^2} \ln(t^2+4) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow K'(x) = -\ln(x^2+4) + \ln(x^4+4) \cdot 2x \end{aligned}$$

$$K'(x) = 2x \cdot \ln(x^4+4) - \ln(x^2+4)$$

5. La solución queda:

a) la derivada es: $F'(x) = 2e^{4x^2}$

El valor buscado es $F'(0) = 2 \cdot e^{4 \cdot 0} = 2$.

b) la derivada de la función $F(x)$ es $F'(x) = \ln x$. Esta no se anula en el intervalo $[2, 10]$. La derivada es positiva en intervalo citado.

Teniendo en cuenta los hechos anteriores la función $F(x)$ no tiene extremos relativos y si extremos absolutos que se alcanzan en los extremos del intervalo.

Para $F(2) = 0,39$ se obtiene el número de la función y en $F(10) = 14,04$ tiene máximo absoluto.

c) En este caso:

$$F'(x) = \frac{x-1}{1+x^2} \quad ; \quad F''(x) = \frac{1-x^2+2x}{(1+x^2)^2}$$

$F'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ y como $F''(1) > 0$ en $x = 1 \in (0, 2)$

$F(x)$ alcanza un mínimo relativo.

d) $F'(x) = x \cdot \cos x$

e) $G'(x) = e^{-x^2} (1+x^2)$

f) $F'(x) = e^{-x^2}$; $F''(x) = -2 \cdot e^{-x^2}$; $F'''(x) = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}$

Por tanto como $F''(0) = 0$ y $F'''(0) \neq 0$ la función $F(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa 0.

g) $F'(x) = e^{\frac{x^4}{2}} \cdot 2x - e^{\frac{x^2}{2}}$

■ 6. Calcula las siguientes integrales definidas:

$$a) \int_1^6 \frac{4 dx}{\sqrt{x+3}}$$

$$j) \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx$$

$$r) \int_3^5 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$b) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2} dx$$

$$k) \int_{-1}^1 \frac{4x}{(x^2 + 2)^4} dx$$

$$s) \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^3 x dx$$

$$c) \int_0^8 \frac{3 dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$l) \int_0^4 \sqrt{9+4x} dx$$

$$t) \int_0^b \frac{dx}{x+b} \text{ con } b > 0$$

$$d) \int_2^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$m) \int_0^2 4x^2 (1+x^3)^5 dx$$

$$u) \int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$$

$$e) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin \sqrt{x}}{3\sqrt{x}} dx$$

$$n) \int_{-1}^0 x^2 \cdot e^{2x} dx$$

$$v) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx$$

$$f) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\tilde{n}) \int_0^1 (x - e^x \cos x) dx$$

$$w) \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$$

$$g) \int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$$

$$o) \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$$

$$x) \int_3^6 \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1} dx$$

$$h) \int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x} dx$$

$$p) \int_3^6 x \sqrt{x-2} dx$$

$$y) \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$$

$$i) \int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}} dx$$

$$q) \int_2^3 \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x} dx$$

$$z) \int_{-1}^1 x^2 \cdot \ln x dx$$

■ 7. Calcula las siguientes integrales definidas:

$$a) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| dx$$

$$c) \int_{-2}^2 |x^2-1| dx$$

$$e) \int_{-\pi}^{2\pi} |x| \sin x dx$$

$$b) \int_0^2 x[|x-1|+1] dx$$

$$d) \int_{-2}^2 ||x|-1| dx$$

$$f) \int_0^2 |2x-1| dx$$

■ 8. Calcula las siguientes integrales mediante la interpretación geométrica:

$$I = \int_{-50}^{50} (x^{23} + x^{21}) dx$$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^5(8x^3 + x) dx$$

■ 9. Halla el área del recinto limitado por la recta $y = 3x + 2$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. Comprueba el resultado por métodos geométricos.

■ 10. Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 - 4x$ y el eje OX .



SOLUCIONES

6. La solución queda:

$$a) \int_1^6 \frac{4 dx}{\sqrt{x+3}}$$

Calculamos la integral indefinida por integrales inmediatas:

$$\int \frac{4 dx}{\sqrt{x+3}} = 4 \int (x+3)^{-\frac{1}{2}} dx = 8\sqrt{x+3} + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_1^6 \frac{4 dx}{\sqrt{x+3}} = [8\sqrt{x+3}]_1^6 = 8\sqrt{9} - 8\sqrt{4} = 24 - 16 = 8$$

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2} dx$ operando de forma análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2} dx &= [\ln(e^x+2)]_0^1 = \ln(e+2) - \ln 3 = \\ &= \ln \frac{e+2}{3} = 0,45 \end{aligned}$$

c) $\int_0^8 \frac{3}{\sqrt{1+x}} dx$ operando de manera análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^8 \frac{3}{\sqrt{1+x}} dx &= 3 \int_0^8 (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx = [6\sqrt{1+x}]_0^8 = \\ &= 6\sqrt{9} - 6\sqrt{1} = 12 \end{aligned}$$

d) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ operando de forma análoga, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} &= [\arctg x]_1^{\sqrt{3}} = \arctg \sqrt{3} - \arctg 1 = \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

e) $\int_0^{\pi^2} \frac{\text{sen} \sqrt{x}}{3\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} \int_0^{\pi^2} \text{sen} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx =$

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{2}{3} \cdot \cos \sqrt{x} \right]_0^{\pi^2} = \left(-\frac{2}{3} \cos \pi \right) - \left(-\frac{2}{3} \cos 0 \right) = \\ &= \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

f) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ queda:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int_0^2 \frac{\frac{1}{3} dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \left[\text{arc sen} \left(\frac{x}{3} \right) + C \right]_0^2 =$$

$$= \left[\text{arc sen} \left(\frac{x}{3} \right) \right]_0^2 = \text{arc sen} \frac{2}{3} - \text{arc sen} 0 = 0,73$$

g) $\int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$ determinamos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{(x+2)(x-1)^2 + 3x-2}{(x-1)^2} dx =$$

$$= \int (x+2) dx + \int \frac{3x}{(x-1)^2} dx - \int \frac{2}{(x-1)^2} dx = \frac{(x+2)^2}{2} +$$

$$+ 3 \int \frac{x-1+1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{2}{(x-1)^2} dx = \frac{(x+2)^2}{2} +$$

$$+ 3 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \frac{(x+2)^2}{2} + 3 \ln|x-1| -$$

$$- \frac{1}{x-1} + C$$

Determinamos la integral definida haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \left[\frac{(x+2)^2}{2} + 3 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} \right]_2^3 =$$

$$= \left(\frac{25}{2} + 3 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) - (8 + 0 - 1) = 5 + 3 \ln 2 = 7,08$$

h) $\int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x} dx$ calculamos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^3-x} dx &= \int \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \\ &+ \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = -\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1| = \\ &= \ln \left| \frac{x^2-1}{x} \right| + C \end{aligned}$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando Barrow, obtenemos la integral definida:

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x} dx &= \left[\ln \left| \frac{x^2-1}{x} \right| \right]_2^5 = \ln \frac{24}{5} - \ln \frac{3}{2} = \\ &= \ln \frac{16}{5} = 1,16 \end{aligned}$$

i) $\int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}} dx$ resolvemos la integral indefinida por cambio de variable, haciendo:
 $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$.

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{t^2}{t^2+t} \cdot 2t dt = \int \frac{2t^2}{t+1} dt = \\ &= \int \frac{(2t-2)(t+1)+2}{t+1} dt = \int (2t-2) dt + \int \frac{2}{t+1} dt = \\ &= t^2 - 2t + 2 \ln|t+1| = x - 2\sqrt{x} + 2 \ln|\sqrt{x}+1| + C \end{aligned}$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}} dx = [x - 2\sqrt{x} + 2 \ln|\sqrt{x}+1|]_4^9 = 3,58$$

j) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cdot dx$ calculemos la integral indefinida:

$$\int \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot 2 dx = \frac{1}{2} (-\cos 2x) + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin 2x \cdot dx &= \left[\frac{1}{2} (-\cos 2x) \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2} (-\cos \pi) - \frac{1}{2} (-\cos 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

k) $\int_{-1}^1 \frac{4x}{(x^2 + 2)^4} dx$ operando de forma análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{4x}{(x^2 + 2)^4} dx &= 2 \int_{-1}^1 (x^2 + 2)^{-4} \cdot 2x dx = \\ &= \left[\frac{-2}{3(x^2 + 2)^3} \right]_{-1}^1 = \frac{-2}{81} - \frac{-2}{81} = 0 \end{aligned}$$

l) $\int_0^4 \sqrt{9 + 4x} dx$ operando de manera análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \sqrt{9 + 4x} dx &= \frac{1}{4} \int_0^4 (9 + 4x)^{\frac{1}{2}} \cdot 4 dx = \left[\frac{\sqrt{(9 + 4x)^3}}{6} \right]_0^4 = \\ &= \frac{125}{6} - \frac{27}{6} = \frac{49}{3} \end{aligned}$$

m) $\int_0^2 4x^2 (1 + x^3)^5 dx$ operando de manera análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^2 4x^2 (1 + x^3)^5 dx &= \frac{4}{3} \int_0^2 (1 + x^3)^5 \cdot 3x^2 dx = \\ &= \left[\frac{4}{3} (1 + x^3)^6 \right]_0^2 = \left[\frac{2(1 + x^3)^6}{9} \right]_0^2 = 118\,098 - \frac{2}{9} = \\ &= 118\,097,8 \end{aligned}$$

$$n) \int_{-1}^0 x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx$$

Determinamos la integral indefinida por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = I$$

$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx \\ dv = e^{2x} \cdot dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} \cdot dx$$

Aplicamos de nuevo el método a esta última integral:

$$\left. \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} \cdot dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \left[\frac{x e^{2x}}{2} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \right] =$$

$$= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Calculamos la integral definida haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow:

$$\int_{-1}^0 x^2 e^{2x} dx = \left[\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} \right]_{-1}^0 = \left(\frac{1}{4} \right) - \left(\frac{5}{4 e^2} \right) = 0,08$$

$$\tilde{n}) \int_0^1 (x - e^x \cos x) dx = \int x dx - \int e^x \cos x dx = \frac{x^2}{2} - I$$

$$\int (x - e^x \cos x) dx = \int x dx - \int e^x \cos x dx = \frac{x^2}{2} - I$$

La integral $I = \int e^x \cos x dx$ la calculamos por el método de integración por partes:

$$\left. \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \text{sen } x \end{array} \right\}$$

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \text{sen } x - \int e^x \text{sen } x dx$$

Aplicando el mismo método a esta última integral, obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \text{sen } x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x - \int -e^x \cos x \, dx \right] = \\
 &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx \Rightarrow \\
 \Rightarrow I &= e^x \sin x + e^x \cos x - I \Rightarrow I = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2}
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int (x - e^x \cos x) \, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando Barrow, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (x - e^x \cos x) \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} \right]_0^1 = \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{e \sin 1 + e \cos 1}{2} \right) - \left(0 - \frac{0 + 1}{2} \right) = \\
 &= 1 - 1,88 = -0,88
 \end{aligned}$$

o) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^3 + 1)}$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^3 + 1} \, dx &= \int \frac{1/3}{x + 1} \, dx + \int \frac{-1/3 x + 2/3}{x^2 - x + 1} \, dx = \\
 &= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2 - x + 1} \, dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} \, dx = \\
 &= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 1 + 1}{x^2 - x + 1} \, dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} \, dx = \\
 &= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \, dx + \\
 &+ \frac{2}{3} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 1/2}{\sqrt{3}/2} \right)^2} \, dx = \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \ln \\
 &|x^2 - x + 1| + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + C
 \end{aligned}$$

Calculamos la integral definida haciendo $C = 0$ y aplicado la regla de Barrow y obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1} &= \left[\frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| + \right. \\
 &+ \left. \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} = 0,84
 \end{aligned}$$

p) $\int_3^6 x\sqrt{x-2} dx$ resolvemos la integral indefinida por el método de cambio de variable,

haciendo $x-2=t^2 \Rightarrow dx=2t dt$.

$$\int x\sqrt{x-2} dx = \int (t^2 + 2) \cdot t \cdot 2t dt = \int (2t^4 + 4t^2) dt =$$

$$= \frac{2t^5}{5} + \frac{4t^3}{3} = \frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{(x-2)^3}}{3} + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_3^6 x\sqrt{x-2} dx = \left[\frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{(x-2)^3}}{3} \right]_3^6 =$$

$$= \left(\frac{64}{5} + \frac{32}{3} \right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{3} \right) = \frac{62}{5} + \frac{28}{3} = \frac{326}{15} = 21,7$$

q) $\int_2^3 \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx$ resolvemos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales:

$$\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \int \frac{(x^3 + x^2 - 2x)(x-1) + 3x^2 - 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx =$$

$$= \int (x-1) dx + \int \frac{3x^2 - 6}{x(x-1)(x+2)} dx = \frac{(x-1)^2}{2} + \int \frac{3}{x} dx +$$

$$+ \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{(x-1)^2}{2} + 3 \ln |x| - \ln |x-1| +$$

$$+ \ln |x+2| = \frac{(x-1)^2}{2} + \ln \left| \frac{x^3(x+2)}{x-1} \right| + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos la integral definida:

$$\int_2^3 \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \left[\frac{(x-1)^2}{2} + \ln \left| \frac{x^3(x+2)}{x-1} \right| \right]_2^3 =$$

$$= \left(2 + \ln \frac{135}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \ln 32 \right) = \frac{3}{2} + \ln \frac{135}{64} = 2,25$$

r) $\int_3^5 \frac{\ln x}{x} dx$ calculamos la integral indefinida:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow

$$\begin{aligned} \int_3^5 \frac{\ln x}{x} dx &= \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_3^5 = \frac{(\ln 5)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} [(\ln 5 - \ln 3)(\ln 5 + \ln 3)] = \frac{1}{2} \ln 15 \cdot \ln \frac{5}{3} = 0,69 \end{aligned}$$

s) $\int_0^{\pi/2} \text{sen } 2x \cdot dx$ calculamos la integral indefinida:

$$\int \text{sen } 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \int \text{sen } 2x \cdot 2 dx = \frac{1}{2} (-\cos 2x) + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \text{sen } 2x \cdot dx &= \left[\frac{1}{2} (-\cos 2x) \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2} (-\cos \pi) - \frac{1}{2} (-\cos 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

t) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x+b}$ con $b > 0$ operando de forma análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_0^b \frac{dx}{x+b} = [\ln |x+b|]_0^b = \ln |2b| - \ln |b| = \ln \frac{2b}{b} = \ln 2 = 0,69$$

u) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$ obtenemos la integral haciendo el cambio: $x-1=t^2 \Rightarrow dx=2t dt$.

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = \int \frac{t}{1+t^2} \cdot 2t dt = \int \frac{2t^2}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \frac{2(1+t^2)-2}{1+t^2} dt = \int 2 dt - \int \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$= 2t - 2 \text{ arc } \text{tg } t = 2\sqrt{x-1} - 2 \cdot \text{arc } \text{tg } \sqrt{x-1} + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow para determinar la integral definida:

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = [2\sqrt{x-1} - 2 \cdot \text{arc } \text{tg } \sqrt{x-1}]_1^4 =$$

$$= \left(2\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{3} \right) - (0 - 0) = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} = 1,37$$

- v) $\int_{-1}^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx$ calculamos la integral indefinida por el método de integrales inmediatas y después calculamos la definida haciendo $C = 0$ y aplicando Barrow.

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx = -\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{-\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \, dx = [-\ln |\operatorname{cos} x| + C]_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= \left(-\ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

- w) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} \, dx$ determinamos la integral indefinida por el método de integrales inmediatas y después la integral definida haciendo $C = 0$ y aplicando Barrow:

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} \, dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{2x}{x^2-1} \, dx = \left[\frac{1}{2} \ln |x^2-1| + C \right]_2^3 =$$

$$= \frac{1}{2} \ln 8 - \frac{1}{2} \ln 3 = \ln \sqrt{\frac{8}{3}} = 0,49$$

- x) $\int_3^6 \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1} \, dx$ resolvemos la integral mediante el cambio: $2x-3=t^2 \Rightarrow dx=t \, dt$.

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1} \, dx = \int \frac{t}{t-1} \cdot t \, dt = \int \frac{t^2}{t-1} \, dt =$$

$$= \int \frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1} \, dt = \int (t+1) \, dt + \int \frac{1}{t-1} \, dt =$$

$$= \frac{(t+1)^2}{2} + \ln |t-1| =$$

$$= \frac{(\sqrt{2x-3}+1)^2}{2} + \ln |\sqrt{2x-3}-1| + C$$

Dando a C el valor 0 y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_3^6 \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1} \, dx = \left[\frac{(\sqrt{2x-3}+1)^2}{2} + \ln |\sqrt{2x-3}-1| \right]_3^6 =$$

$$= (8 + \ln 2) - \left[\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} + \ln(\sqrt{3}-1) \right] = 5,27$$

y) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$ esta integral no está definida en $[0, 1]$.

Resolvemos la integral indefinida en el campo complejo por el método de cambio de variable, haciendo $x^2-1=t^2 \Rightarrow dx = \frac{t dt}{x}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \int \frac{t}{x} \cdot \frac{t dt}{x} = \int \frac{t^2}{x^2} dt = \int \frac{t^2}{t^2+1} dt =$$

$$= \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt = \int dt \int \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$= t - \text{arc tg } t = \sqrt{x^2-1} - \text{arc tg } \sqrt{x^2-1} + C.$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = [\sqrt{x^2-1} - \text{arc tg } \sqrt{x^2-1}]_0^1 = \frac{-\pi \cdot i}{4}$$

z) $\int_{-1}^1 x^2 \cdot \ln x dx$ esta integral no está definida en el intervalo $[-1, 1]$.

7. Las integrales quedan:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x| dx &= \int_{-\pi/2}^0 -\operatorname{sen} x dx + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx = \\ &= [\cos x]_{-\pi/2}^0 + [-\cos x]_0^{\pi/2} = (1 - 0) + (-0 + 1) = 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_0^2 x|x-1| + 1 dx &= \int_0^1 (-x^2 + 2x) dx + \int_1^2 x^2 dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 3. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx &= 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx + 2 \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \\ &= 2[-x^2 + 2x]_0^1 + 2[x^2 - 2x]_1^2 = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 ||x| - 1| dx &= 2 \int_0^1 (-x + 1) dx + 2 \int_1^2 (x - 1) dx = \\ &= [-x^2 + 2x]_0^1 + [x^2 - 2x]_1^2 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen} x dx &= \int_{-\pi}^0 -x \operatorname{sen} x dx + \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} x dx = \\ &= [x \cos x - \operatorname{sen} x]_{-\pi}^0 + [-x \cos x + \operatorname{sen} x]_0^{2\pi} = \\ &= -\pi - 2\pi = -3\pi. \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \int_0^2 |2x - 1| dx &= \int_0^{1/2} (-2x + 1) dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1) dx = \\ &= [-x^2 + 2x]_0^{1/2} + [x^2 - x]_{1/2}^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

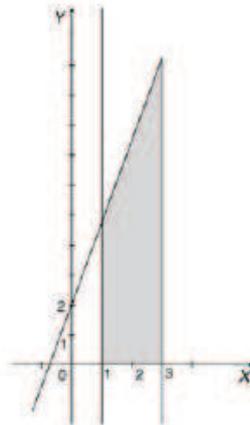
8. Las integrales quedan:

$$I = \int_{-50}^{50} (x^{33} + x^{21}) dx = 0$$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^5 (8x^3 + x) dx = 0$$

Ambas integrales son iguales a cero, pues al ser las funciones impares y simétricas respecto al origen se anulan entre si las áreas de las regiones que se obtienen.

9. El área viene dada por:



El área del recinto sombreado viene dada por:

$$\begin{aligned} \int_1^3 (3x + 2) dx &= \\ &= \left[\frac{3x^2}{2} + 2x \right]_1^3 = \left(\frac{27}{2} + 6 \right) - \left(\frac{3}{2} + 2 \right) = 16 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Directamente este recinto es un trapecio y su área vale:

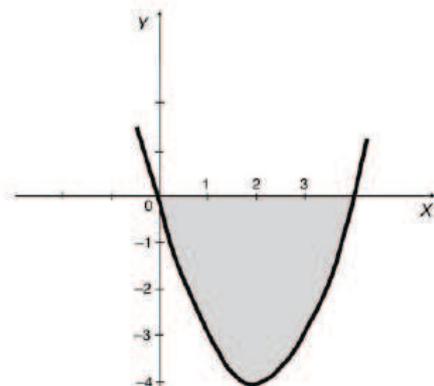
$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{11 + 5}{2} \cdot 2 = 16 \text{ u}^2$$

Con lo que queda comprobado el resultado anterior.

10. Queda:

Recinto sombreado:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= -\int_0^4 (x^2 - 4x) dx = -\left[\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \right]_0^4 = \\ &= -\left[\frac{64}{3} - 32 \right] = \frac{32}{3} \text{ u}^2 = 10,7 \text{ u}^2 \end{aligned}$$



ACTIVIDADES FINALES

- 11. Halla el área del recinto limitado por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = -\frac{1}{2}x^2$.
- 12. Halla el área de la región limitada por la curva $y = x^3 - 8x^2 + 7x$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 7$.
- 13. Halla el área del recinto limitado por la curva $y = \cos x$, el eje OX y las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.
- 14. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y^2 = 6x$	b) $y^2 = 9x$	c) $y = 6x - x^2$
$x^2 = 6y$	$y^2 = 4(x + 1)$	$y = x^2 - 2x$
- 15. Determina el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x e^{-x}$ y $g(x) = x^2 e^{-x}$.
- 16. Calcula el área de la región limitada por la hipérbola $xy = 36$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 6$ y $x = 12$.
- 17. Halla, utilizando la integral definida, el área del círculo limitado por la curva de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ y el área encerrada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 18. Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX los recintos siguientes:

a) $f(x) = 2x + 1$; $x = 0$, $x = 4$	c) $f(x) = x - x^2$; $x = 0$, $x = 1$
b) $f(x) = \sin x$; $x = 0$, $x = \pi$	d) $f(x) = e^x$; $x = 0$, $x = 1$
- 19. Calcula el volumen engendrado al girar alrededor de OX los recintos limitados por las gráficas que se indican:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$	c) $f(x) = \sqrt{2x}$; $g(x) = \frac{2x+3}{4}$
b) $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = 1 - x^2$	d) $f(x) = x^2$; $g(x) = -3x - 2$
- 20. Halla el volumen de la región determinada por la curva de ecuación $y = e^{-x}$, el eje OX , el eje OY y la recta $x = 3$, al girar alrededor de OX .
- 21. Halla el volumen generado al girar alrededor del eje OX el recinto plano determinado por dicho eje y la curva $y = x - x^3$.
- 22. A partir de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, obtén el volumen de una esfera.
- 23. Calcula el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa al eje OX .

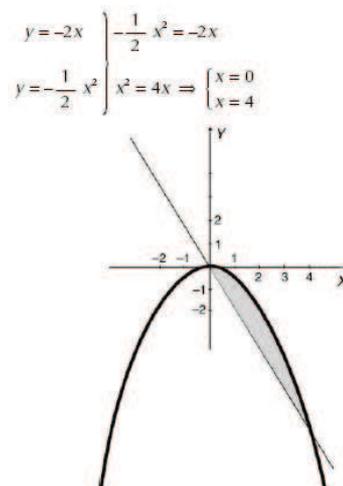


SOLUCIONES

11. Queda:

Queremos calcular el area del recinto sombreado:

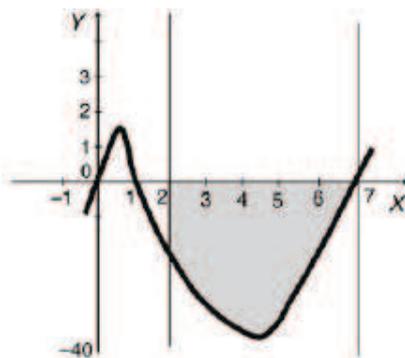
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 \left[\left(-\frac{1}{2}x^2 \right) - (-2x) \right] dx = \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{6} \right]_0^4 = 16 - \frac{64}{6} = 5,3 \text{ u}^2 \end{aligned}$$



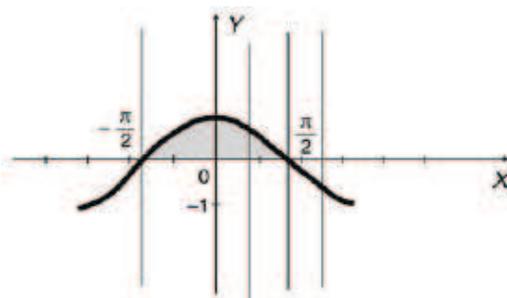
12. La solución es:

El área pedida es la del recinto sombreado.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= -\int_2^7 (x^3 - 8x^2 + 7x) dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} \right]_2^7 = \\ &= -\left[\left(\frac{2401}{4} - \frac{2744}{3} + \frac{343}{2} \right) - \left(4 - \frac{64}{3} + 14 \right) \right] = \\ &= 139,58 \text{ u}^2 \end{aligned}$$



13. Queda:

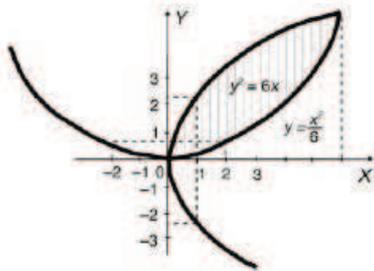


El área del recinto limitado por la curva, el eje OX y las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$ vale:

$$\text{Área} = 2 \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 2 [\text{sen } x]_0^{\pi/2} = 2 \text{ u}^2$$

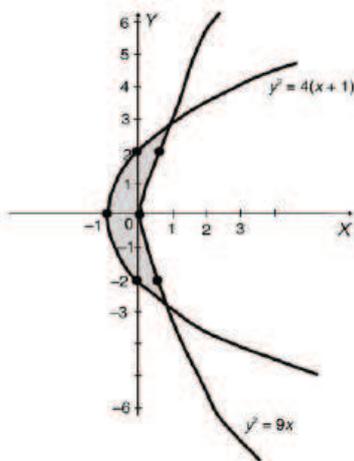
14. La solución queda:

a)



$$\text{Área} = \int_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6} \right) dx = \left[\frac{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{18} \right]_0^6 = 12 \text{ u}^2$$

b)



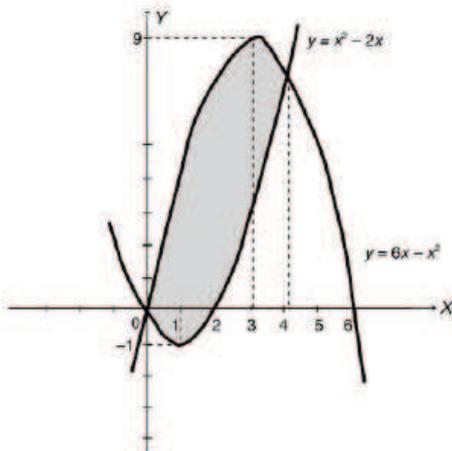
Las curvas $y^2 = 9x$; $y^2 = 4(x+1)$ se cortan en los puntos de abscisa $x = 0,8$ pues:

$$9x = 4(x+1) \Rightarrow x = \frac{4}{5} = 0,8$$

El área pedida es la de la zona sombreada y vale:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \left[\int_{-1}^{0,8} 2\sqrt{x+1} dx - \int_0^{0,8} 3\sqrt{x} dx \right] = \\ &= 2 \left[\frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3} \right]_{-1}^{0,8} - 2 \left[2\sqrt{x^3} \right]_0^{0,8} = \\ &= \frac{8\sqrt{1,8^3}}{3} - 4\sqrt{0,8^3} = 3,58 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

c)



Estas curvas se cortan en los puntos solución del sistema:

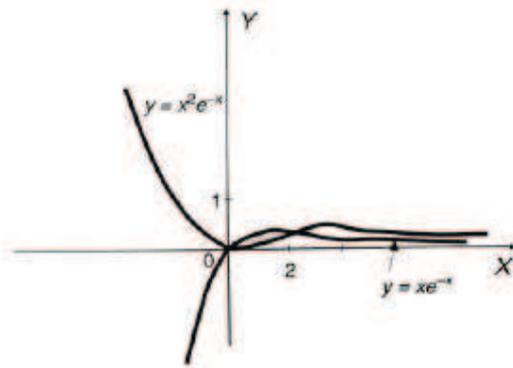
$$\left. \begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & y = 0 & P(0,0) \\ x = 4 & y = 8 & Q(4,8) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_2^0 (x^2 - 2x) dx + \int_0^4 (6x - x^2) dx - \int_2^4 (x^2 - 2x) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^0 + \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^4 = \\ &= \left(\frac{-8}{3} + 4 \right) + \left(48 - \frac{64}{3} \right) - \left[\left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \right] = \\ &= \frac{-8}{3} + 4 + 48 - \frac{64}{3} - \frac{64}{3} + 16 + \frac{8}{3} - 4 = \\ &= 64 - \frac{128}{3} = 21,3 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Otra forma de hallar el area del recinto buscado:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^4 (8x - 2x^2) dx = \\ &= \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^4 = 64 - \frac{128}{3} = 21,3 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

15. La solución es:



Las curvas se cortan en $x = 0$ y $x = 1$. Calculamos el area de la zona sombreada.

$$\text{Área} = \int_0^1 (x e^{-x} - x^2 e^{-x}) dx = \int_0^1 (x - x^2) e^{-x} dx$$

Resolvemos por el método de integración por partes la integral indefinida:

$$\int (x - x^2) e^{-x} dx$$

$$\left. \begin{array}{l} u = x - x^2 \Rightarrow du = (1 - 2x) dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\}$$

$$I = \int (x - x^2) e^{-x} dx = -(x - x^2) e^{-x} - \int -(1 - 2x) e^{-x} dx =$$

$$= (x^2 - x) e^{-x} + \int (1 - 2x) e^{-x} dx$$

$$\left. \begin{array}{l} u = 1 - 2x \Rightarrow du = -2 dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\}$$

$$I = \int (x - x^2) e^{-x} dx = (x - x^2) e^{-x} - (1 - 2x) e^{-x} -$$

$$- \int 2 e^{-x} dx = (x^2 - x) e^{-x} - (1 - 2x) e^{-x} + 2 e^{-x} + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida que nos permite calcular el area pedida:

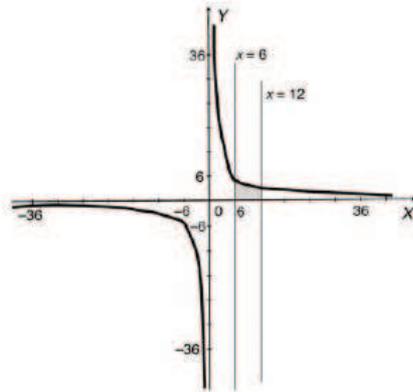
$$\text{Área} = [(x^2 - x) e^{-x} - (1 - 2x) e^{-x} + 2 e^{-x}]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{e} - 1 = 0,1036 u^2$$

16. La solución es:

El área del recinto sombreado buscado vale:

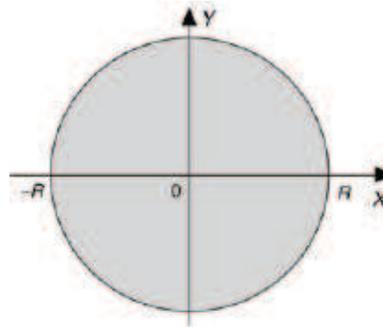
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_6^{12} \frac{36}{x} dx = [36 \ln x]_6^{12} = 36 \ln \frac{12}{6} = \\ &= 36 \ln 2 = 24,95 \text{ u}^2 \end{aligned}$$



17. La solución:

El círculo de radio R queda limitado por la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 = R^2$

$$\text{Área} = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$



Calculamos la integral indefinida $\int \sqrt{R^2 - x^2} dx$ mediante el cambio de variable:

$$x = R \cdot \text{sen } t \Rightarrow dx = R \cdot \text{cos } t \cdot dt$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{R^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{R^2 - R^2 \text{sen}^2 t} \cdot R \cdot \text{cos } t \cdot dt = \\ &= \int R^2 \cdot \text{cos}^2 t \cdot dt = R^2 \int \frac{1 + \text{cos } 2t}{2} dt = \\ &= R^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\text{sen } 2t}{4} \right) + C = \\ &= R^2 \left(\frac{\text{arc sen } \frac{x}{R}}{2} + \frac{2 \cdot \frac{x}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}}{4} \right) + C \end{aligned}$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida que nos da el área del círculo buscado:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = \\ &= \left[4R^2 \left(\frac{\arcsen \frac{x}{R}}{2} + \frac{2 \cdot \frac{x}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}}{4} \right) \right]_0^R = \\ &= 4R^2 \left[\left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) - (0 + 0) \right] = (\pi R^2) u^2 \end{aligned}$$

- La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ encierra un recinto cuya área vale:

$$\text{Área} = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}} \, dx$$

Calculamos la integral indefinida

$$\int \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}} \, dx$$

Por el método de cambio de variable, para ello hacemos $x = a \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = a \cos t \, dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a} \sqrt{a^2 b^2 - b^2 x^2} \, dx &= \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t} \cdot a \cos t \, dt = \\ &= \frac{b}{a} \int a^2 \cos^2 t \, dt = ab \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \\ &= \frac{ab}{2} \left(t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \right) + C \\ &= \frac{ab}{2} \left(\arcsen \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + C \end{aligned}$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida que nos da el área encerrada por la elipse dada:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}} \, dx \\ &= \left[\frac{4ab}{2} \left(\arcsen \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \right]_0^a = \\ &= 2ab \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - 2ab(0 - 0) = (ab \cdot \pi) u^2 \end{aligned}$$

18. Los volúmenes son:

$$\begin{aligned} \text{a) } V &= \pi \int_0^4 (2x + 1)^2 dx = \pi \int_0^4 (4x^2 + 4x + 1) dx = \\ &= \pi \left[\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x \right]_0^4 = \frac{364\pi}{3} u^3 \end{aligned}$$

$$\text{b) } V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} u^3$$

$$\begin{aligned} \text{c) } V &= \pi \int_0^1 (x - x^2)^2 dx = \pi \left[\left(\frac{6x^5 - 15x^4 + 10x^3}{30} \right) \right]_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{30} u^3 \end{aligned}$$

19. Los volúmenes quedan:

$$\text{a) } V = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{\pi x^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{\pi x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{10}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } V &= 2\pi \int_0^1 (x^2 - 1)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \\ &= 2\pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } V &= \pi \int_{0,5}^{4,5} 2x dx - \pi \int_{0,5}^{4,5} \left(\frac{2x + 3}{4} \right)^2 dx = [\pi x^2]_{0,5}^{4,5} - \\ &- \pi \left[\frac{x^3}{12} + \frac{3x^2}{8} + \frac{9x}{16} \right]_{0,5}^{4,5} = 20\pi - 17,33\pi = 2,67\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } V &= \pi \int_{-2}^{-1} (-3x - 2)^2 dx - \pi \int_{-2}^{-1} x^4 dx = \\ &= \pi \int_{-2}^{-1} (9x^2 + 12x + 4) dx - \pi \int_{-2}^{-1} x^4 dx = \\ &= \pi [3x^3 + 6x^2 + 4x]_{-2}^{-1} - \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{-1} = \\ &= 7\pi - \frac{\pi \cdot 31}{5} = \frac{4\pi}{5} \end{aligned}$$

20. El volumen es:

$$V = \pi \int_0^3 e^{-2x} dx = \pi \left[\frac{-e^{-2x}}{2} \right]_0^3 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-6}}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

21. El volumen es:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (x - x^3)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - 2x^4 + x^6) dx = \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{16\pi}{105} \end{aligned}$$

22. el volumen de la esfera es:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \\ &= 2\pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = 2\pi \frac{2R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

23. el volumen del elipsoide es:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^5 \left(1 - \frac{x^2}{25} \right) dx = 2\pi \left[x - \frac{x^3}{75} \right]_0^5 = 2\pi \cdot \frac{10}{3} = \\ &= \frac{20\pi}{3} \end{aligned}$$

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

- 24. Dada la función $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[-3, 2]$ y la partición P del mismo formada por los puntos $P = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$, calcula razonadamente cuánto valen la suma superior y la suma inferior correspondientes a dicha partición.
- 25. Haciendo uso del teorema del valor medio del cálculo integral, calcula el valor de c para la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.
- 26. Dada la función $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t} dt$, determina $F'(x)$ y $F''(x)$.
- 27. Para la función $F(x) = \int_0^x \cos t^2 dt$, determina:
- a) $F'(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt$
- 28. Sea $F(x) = \int_1^{x^2} (t^2 - 1) dt$. Halla los posibles puntos extremos de dicha función.
- 29. Calcula la siguiente integral definida: $\int_{-1}^1 |x| dx$.
- 30. Calcula las siguientes integrales definidas:
- a) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 2} dx$ b) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$ c) $\int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{1+x^2} dx$
- 31. Determina, en función de $b > 1$, el valor de la integral $\int_0^b |x-1| \cos x dx$.
- 32. Dibuja la región del plano limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 4$. Calcula su área.
- 33. Calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, el eje OX y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $x = e$.
- 34. Una varilla se desliza por el interior de la parábola $y = x^2$ paralelamente al eje OX hasta determinar una superficie de 36 m^2 . Encuentra a qué distancia del eje OX se detiene la varilla.
- 35. Calcula el valor de a sabiendo que el área comprendida entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$, es 36 .
- 36. Calcula el área del recinto limitado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 3x + 2$ y la función $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x + 2}$.
- 37. Calcula el área comprendida entre la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$, el eje OX y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.



SOLUCIONES

24. La suma superior es:

$$S(P) = [-2 - (-3)] \cdot 8 + [-1 - (-2)] \cdot 3 + [1 - (-1)] \cdot 0 + (2 - 1) \cdot 3 = 8 + 3 + 0 + 3 = 14.$$

La suma inferior es:

$$s(P) = [-2 - (-3)] \cdot 3 + [-1 - (-2)] \cdot 0 + [1 - (-1)] \cdot 0 + (2 - 1) \cdot 0 = 3 + 0 + 0 + 0 = 3.$$

25. Aplicando este teorema obtenemos :

$$\int_0^1 x^2 dx = c^2 \cdot (1 - 0) \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Como } c \in (0, 1) \Rightarrow \text{el valor buscado es } c = + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

26. La solución en cada caso es:

La primera derivada es:

$$F'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x = 2xe^{-x^4}$$

La segunda derivada es:

$$F''(x) = (2 - 8x^4)e^{-x^4}$$

27. La solución es:

a) La derivada es:

$$F'(x) = \cos x^2$$

b) El límite produce una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicando la regla de L'Hopital obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1} = \cos 0 = 1$$

28. Las derivadas de la función son:

$$F'(x) = (x^4 - 1) \cdot 2x \Rightarrow F'(x) = 2x^5 - 2x$$

$$F''(x) = 10x^4 - 2$$

La primera derivada se anula y obtenemos:

$$F'(x) = 0 \Rightarrow 2x^5 - 2x = 0 \Rightarrow x = -1, x = 0, x = 1$$

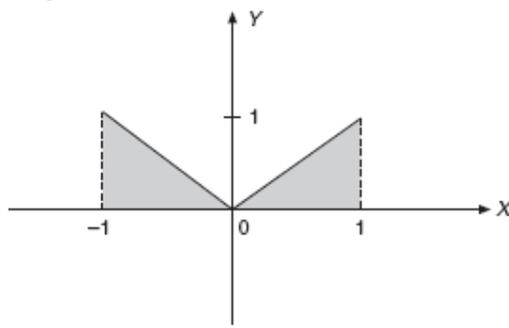
En el punto $(-1, 0)$, al ser $F''(-1) = 8 > 0$ existe un mínimo relativo.

En el punto $(1, 0)$, al ser $F''(1) = 8 > 0$ existe un mínimo relativo.

En el punto $(0, 2/3)$, al ser $F''(0) = -2 < 0$, existe un máximo relativo.

29. Tenemos que:

$$\int_{-1}^1 |x| dx = 2 \int_0^1 x dx = [x^2]_0^1 = 1.$$



30. En cada caso queda:

a) haciendo el cambio $e^x = t$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 2} dx &= \int_1^e \frac{1}{t^2 + t + 2} dt = \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \int_1^e \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}t + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} \frac{2}{\sqrt{7}} dt = \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{7} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{7}}t + \frac{1}{\sqrt{7}} \right) \right]_1^e = \frac{2\sqrt{7}}{7} (1,18 - 0,85) = 0,249 \end{aligned}$$

b) $\int_0^\pi x^2 \cos x dx = [x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x]_0^\pi = -2\pi$

c) Haciendo el cambio de variable $1 + x^2 = t^2$, obtenemos:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{1 + x^2} dx = \int_1^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

31. La solución es:

$$\int_1^b |x-1| \cos x \, dx = \int_0^1 -(x-1) \cdot \cos x \cdot dx +$$

$$+ \int_1^b (x-1) \cdot \cos x \cdot dx = \int_0^1 -(x-1) \cdot \cos x \cdot dx +$$

$$+ \int_1^b (x-1) \cdot \cos x \cdot dx$$

Calculamos la integral indefinida por el método de interacción por partes:

$$I = \int (x-1) \cdot \cos x \cdot dx$$

$$\left. \begin{array}{l} u = x-1 \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x \cdot dx \Rightarrow v = \text{sen } x \end{array} \right\}$$

$$I = \int (x-1) \cdot \cos x \cdot dx = (x-1) \text{sen } x - \int \text{sen } x \cdot dx =$$

$$= (x-1) \cdot \text{sen } x + \cos x + C$$

$$\int_0^b |x-1| \cos x \cdot dx = -[(x-1) \text{sen } x + \cos x]_0^1 +$$

$$+ [(x-1) \text{sen } x + \cos x]_1^b = -\cos 1 + 1 +$$

$$+ [(b-1) \text{sen } b + \cos b - \cos 1] = 1 + (b-1) \text{sen } b +$$

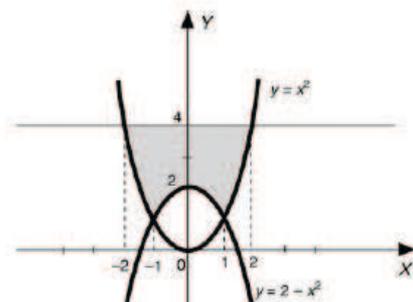
$$+ \cos b - 2 \cos 1$$

32. El área es:

La zona sombreada es la región de plano limitada por las curvas dadas.

$$\text{Área} = 2 \left[\int_0^1 4 - (2-x^2) \, dx + \int_1^2 (4-x^2) \, dx \right] =$$

$$= 2 \left[2x + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{14}{3} + \frac{10}{3} = 8 \, u^2$$

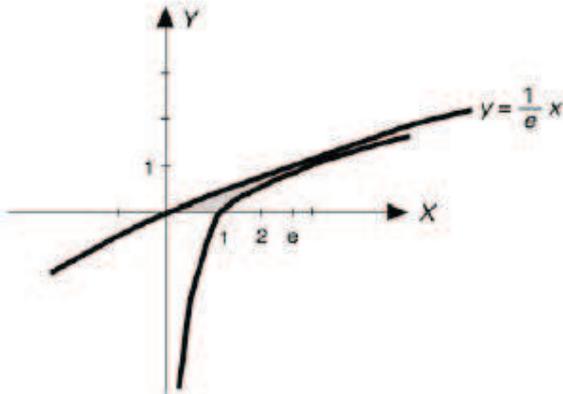


33. Ecuación de la recta tangente a $f(x) = \ln x$, en el punto $(e, 1)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow m = \frac{1}{e}$$

$$y - 1 = \frac{1}{e} (x - e) \Rightarrow y = \frac{1}{e} x$$

la recta tangente tiene por ecuación $y = \frac{1}{e} x$



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^e \left(\frac{1}{e} x - \ln x \right) dx = \left[\frac{x^2}{2e} - (x \ln x - x) \right]_0^e = \\ &= \frac{3e}{2} - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \frac{3e}{2} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{3e}{2} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \frac{3e}{2}$$

34. La solución es:

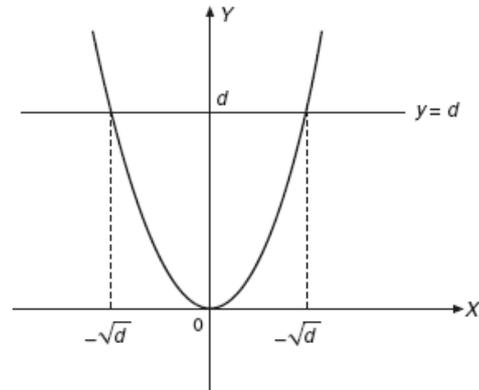
Llamando d a la distancia buscada, se cumple:

$$36 = 2 \left\{ d\sqrt{d} - \int_0^{\sqrt{d}} x^2 dx \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 = d\sqrt{d} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{d}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 = d\sqrt{d} - \frac{d\sqrt{d}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 = \frac{2d\sqrt{d}}{3} \Leftrightarrow d = 3$$



A una distancia de 3 unidades.

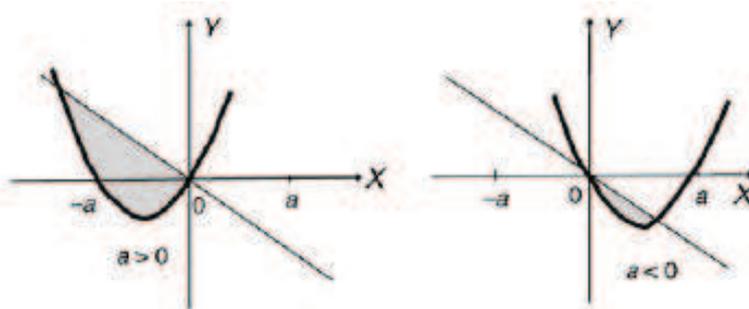
35. La parábola y la recta se cortan en los puntos:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 + ax \\ y + x = 0 \end{array} \right\} x^2 + ax = -x \Rightarrow x^2 + x(a + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = -a - 1; y = a + 1 \end{cases}$$

$$\text{Área pedida} = \left| \int_0^{-a-1} [-x - (x^2 + ax)] dx \right|$$

Ponemos el valor absoluto, pues el área puede ser diferente según sea $a > 0$ o $a < 0$.



La integral se resuelve del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_0^{-a-1} [-x - (x^2 + ax)] dx \right| = \\
 &= \left| \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^{-a-1} \right| = \\
 &= \left| -\frac{(-a-1)^2}{2} - \frac{(-a-1)^3}{3} - \frac{a(-a-1)^2}{2} \right| = \\
 &= \left| \frac{-a^3 - 3a^2 - 3a - 1}{6} \right| = \left| -\frac{(a+1)^3}{6} \right|
 \end{aligned}$$

Como el área es 36, entonces:

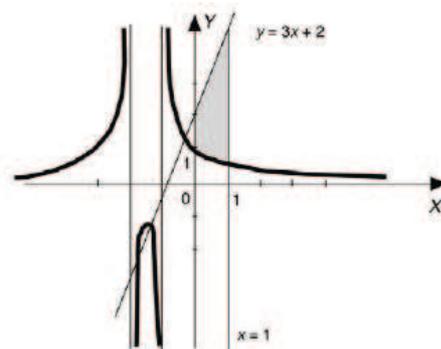
$$\begin{aligned}
 \left| -\frac{(a+1)^3}{6} \right| &= 36 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-(a+1)^3}{6} = 36 \Rightarrow a+1 = -6 \Rightarrow a = -7 \\ \frac{-(a+1)^3}{6} = -36 \Rightarrow a+1 = 6 \Rightarrow a = 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Las soluciones son: $a = -7$ o $a = 5$

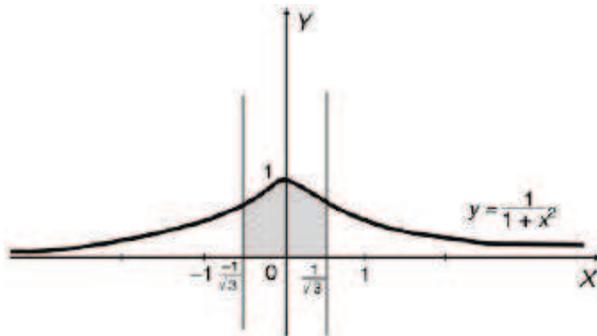
36. La superficie viene dada del siguiente modo:

El área de la zona sombreada viene dada por:

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_0^1 (3x+2) - \left(\frac{2}{x^2+3x+2} \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left(3x+2 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx = \\
 &= \left[\frac{3x^2}{2} + 2x - 2 \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| \right]_0^1 = \\
 &= \frac{3}{2} + 2 - 4 \ln 2 + 2 \ln 3 = \frac{7}{2} + \ln \frac{9}{16} = 2,92
 \end{aligned}$$



37. La superficie viene dada del siguiente modo:



Hallamos los puntos de inflexión:

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad y'' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{6} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Los puntos de inflexión son:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right) \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\text{Área} = 2 \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= 2 \left[\text{arc tg } x \right]_0^{1/\sqrt{3}} = 2 \left[\frac{\pi}{6} - 0 \right] = \frac{\pi}{3} = 1,046 \text{ u}^2$$

ACTIVIDADES FINALES

- 38. Calcula el valor de la integral $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.
- 39. Sea la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Determina:
- El área encerrada entre su gráfica, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.
 - El área encerrada entre la tangente en $x = \pi$ y los ejes coordenados.
- 40. Encuentra un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que:
- Tiene un máximo relativo en $x = 1$.
 - Tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$.
 - Se verifica $\int_0^1 p(x) dx = \frac{5}{4}$.
- 41. Halla todos los valores de a para los cuales $\int_0^a \frac{16}{15 + 2x - x^2} dx = \ln 25$.
- 42. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$:
- Calcula $\int_0^2 f(x) dx$.
 - Halla la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que cumple $F(1) = 1$.
- 43. Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Esboza la gráfica de $f(x)$ y calcula $\int_1^3 x f(x) dx$.
- 44. Sea la función $f(x)$ definida y continua en $[-2, 2]$ tal que:
- $$\int_{-2}^{-1} f(t) dt = \int_1^2 f(t) dt$$
- Utilizando el teorema del valor medio, ¿se puede asegurar que existen b y c en $[-2, 2]$ de modo que $f(b) = f(c)$ con $b \leq -1$ y $c \geq 1$?
- 45. Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda de la misma que une los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 1$.
- 46. Dada la función $F(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ definida para $x \geq 1$, halla los valores de x en los cuales alcanza sus extremos relativos.
- 47. Sea $f(x)$ una función derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$ tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2x f'(x) dx = 1$. Mediante la integración por partes calcula $\int_0^1 f(x) dx$.
- 48. Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a , b y c de modo que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 0$, la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = 1$ sea paralela a la recta $y = 4x$, y el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ sea igual a 1.
- 49. Estudia la monotonía y la curvatura de la función: $F(x) = \int_0^x (t^2 - 1) \cdot e^{-t} dt$.



SOLUCIONES

38. Haciendo la integral definida por partes obtenemos:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right)_1^e = 1 - \frac{2}{e} = 0,2642$$

39. La solución es:

a) El área = $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot dx = (-x \cos x + \sin x)_0^{\pi} = \pi$ unidades cuadradas.

b) la recta tangente en el punto dado tiene por ecuación $y = \pi(x - \pi)$

El área buscada es: Área = $\int_{\pi}^0 \pi(x - \pi) dx = \frac{\pi^3}{2} = 15,50314$ unidades cuadradas.

40. Imponiendo las condiciones del enunciado al polinomio tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ b = 0 \\ d = 1 \\ \frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1 = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \text{de donde obtenemos que } a = -\frac{1}{5}; b = 0; c = \frac{3}{5}; d = 1$$

Por tanto el polinomio es $P(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1$

41. Resolvemos esta integral por descomposición en fracciones simples y obtenemos:

$$\int_0^a \frac{16}{15 + 2x - x^2} dx = \left[\ln \left(\frac{x+3}{x-5} \right) \right]_0^a = \ln \left(\frac{5(a+3)}{-3(a-5)} \right)^2$$

Igualando esta expresión a la que nos da el enunciado obtenemos que a puede tomar valores 3 y 9.

42. La solución es:

a) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}} dx = \left[\frac{\sqrt{5x^2 - 4}}{5} \right]_0^2 = \frac{4 - 2i}{5}$ no tiene soluciones reales.

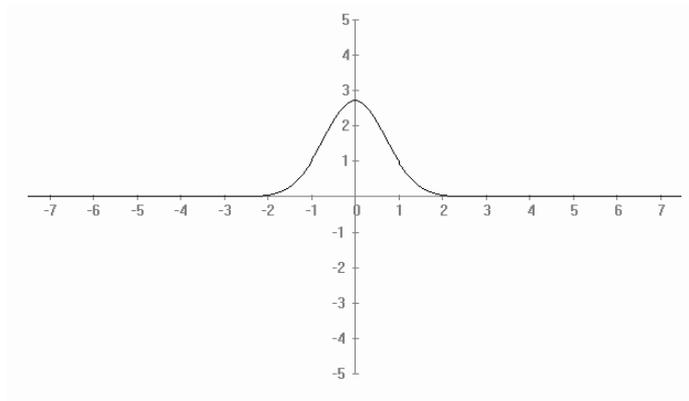
b) todas las primitivas son de la forma $\frac{\sqrt{5x^2 - 4}}{5} + C$ imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos que la primitiva buscada es $F(x) = \frac{\sqrt{5x^2 - 4}}{5} + \frac{4}{5}$

43. La función dada es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $(0, e)$ y dos puntos de inflexión en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{\frac{1}{2}}\right)$.

Tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$.

Su gráfica es:



Calculamos la integral pedida:
$$\int_1^3 x \cdot f(x) \cdot dx = \int_1^3 x \cdot e^{1-x^2} \cdot dx = \left[\frac{e^{1-x^2}}{-2} \right]_1^3 = \frac{e-1}{2e^8} = 0,5$$

44. En cada caso diremos:

- $f(x)$ es continua en $[-2, -1]$, por lo que aplicando el teorema del valor medio tenemos que $\exists b \in [-2, -1]$ tal que: $\int_{-2}^{-1} f(t) dt = f(b)(-1+2) = f(b)$
- $f(x)$ es continua en $[1, 2]$, por lo que aplicando el teorema del valor medio tenemos que $\exists c \in [1, 2]$ tal que: $\int_1^2 f(t) dt = f(c)(2-1) = f(c)$

De ambas igualdades concluimos que $f(b) = f(c)$ con $b \leq -1$ y $c \geq 1$

45. La solución queda:

La cuerda tiene por ecuación $y - e = \frac{e^2 - 1}{2e}(x - 1)$

Calculamos el área:
$$\int_{-1}^e \left[e + \frac{e^2 - 1}{2e}(x - 1) - e^x \right] dx = \frac{2}{e} = 0,74$$

46. La solución es:

Aplicando el teorema fundamental del calculo integral obtenemos: $F(x) = \frac{\text{sen}x}{x}$

Por lo que las abscisas de sus extremos relativos en un periodo son:

Máximo relativo en $x = \frac{\pi}{2}$ y mínimo relativo en $x = \frac{3\pi}{2}$.

47. La solución es:

Aplicando la integración por partes obtenemos: $\int_0^1 f(x)dx = [x \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot f'(x)dx = f(1) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

48. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\begin{cases} b = 0 \\ 3 + 2a + b = 4 \text{ de donde } a = \frac{1}{2}; b = 0; c = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + c = 1 \end{cases}$$

49. La solución queda:

Aplicando el teorema fundamental del calculo integral obtenemos:

$$F(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x^2} \quad \text{y} \quad F'(x) = (4x - 2x^3) \cdot e^{-x^2}$$

La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 1)$

La función es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$

La función es cóncava hacia las y negativas en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$