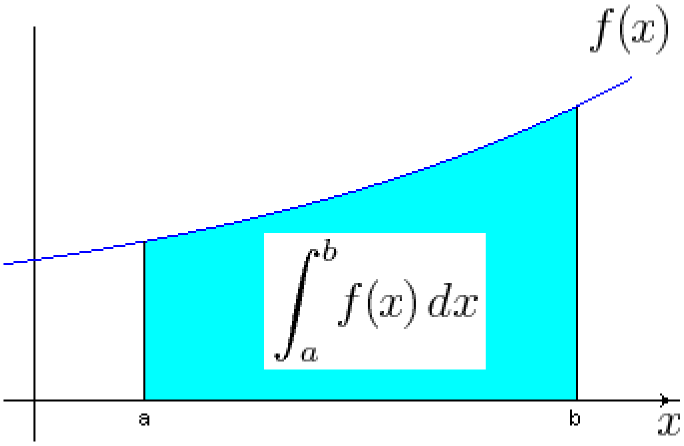
La ∫ntegral Definida



6.0.- Introducción

El ***Cálculo Integral***, que es una de las más importantes y complejas partes del Análisis Matemático tiene su origen en ***el estudio del área de figuras planas***. Las fórmulas para el cálculo de las áreas de triángulos y rectángulos eran ya conocidas en la Grecia Clásica, así como la de los polígonos regulares previa descomposición en triángulos.

El problema se plantea a la hora de calcular áreas de figuras limitadas por líneas curvas. ***Euclides*** (300 a.C.) sigue los trabajos de Eudoxio (400-355 a.C.) para calcular el área del círculo por el método de exhaución, es decir, inscribiendo en él sucesivamente polígonos con más lados. La suma de estas áreas se aproximaba cada vez más al área del círculo, estando en el "límite" el valor exacto.

Arquímedes (287-212 a.C.) halló también el área encerrada por un arco de parábola y la cuerda correspondiente, cosa realmente difícil en aquel tiempo, ya que no se disponía del álgebra formalizada ni de la geometría analítica. El método utilizado era el de agotamiento, esto es, se encaja el área entre dos polígonos, uno inscrito en la región y otro circunscrito a la región.

Desde los griegos hasta el siglo XVII poco se hizo con relación al cálculo de áreas y volúmenes de figuras limitadas por líneas o superficies cerradas. ***Pascal, Fermat y Leibniz*** comienzan un estudio engarzado con el cálculo diferencial; así pues, aunque históricamente se estudian los primeros elementos del cálculo integral antes que el diferencial, en el siglo XVII se estudian y configuran a la par, relacionándose por medio de muchos e importantes resultados.

En esta primera de las dos unidades que dedicaremos al cálculo integral, nos centraremos en el ***Cálculo de Primitivas***, herramienta necesaria para la segunda unidad, en la que aplicaremos lo visto en esta para el cálculo de áreas.

6.1.- Integral Definida

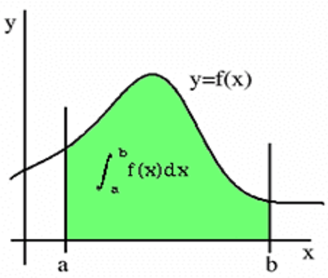
La integral definida de una función en el intervalo [a,b] se simboliza por $\int_a^b f(x)dx$, donde b es el límite superior de integración y a el límite inferior de integración.

6.1.1.- Significado Geométrico de la integral

Con la integral definida se pretende calcular el área de una región del plano limitada por una curva.

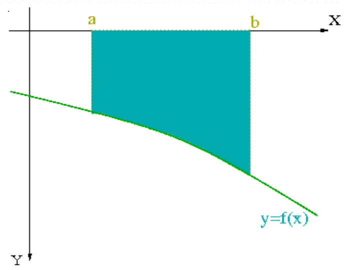
Sea el plano afín real euclídeo y $(O,\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ un sistema de referencia ortonormal de ejes OX y OY.

- Si la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, es positiva e integrable, la integral definida de la función f sobre dicho intervalo representa el área de la región limitada por la curva, el eje OX y las perpendiculares por los puntos a y b, y la integral es positiva.



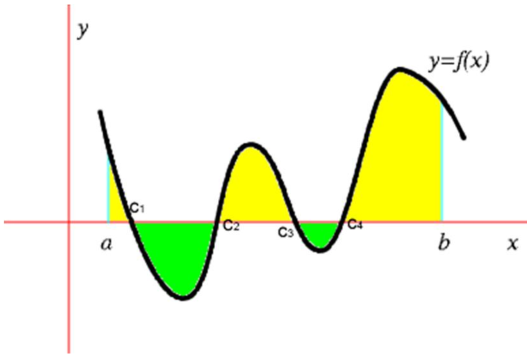
$$+\int_a^b f(x)dx = \text{Área bajo la curva} > 0$$

- Si la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, es negativa e integrable, la integral definida de la función f sobre dicho intervalo representa el área de la región limitada por la curva, el eje OX y las perpendiculares por los puntos a y b, pero con signo negativo.



$$-\int_a^b f(x)dx = \text{Área bajo la curva}$$

- Si la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, toma valores positivos y negativos sobre el intervalo cerrado [a,b], entonces, la integral definida de la función f sobre dicho intervalo representa la suma de las áreas de las regiones comprendidas entre la función, el eje de las x, y las perpendiculares por a y b, pero asignándole a cada una de ellas el signo + o - según que esté por encima o por debajo del eje x. Para ello es necesario conocer los puntos de corte de la curva con el eje OX.



$$Area=+\int_a^{c_1} f(x)dx-\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx+\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx-\int_{c_3}^{c_4} f(x)dx+\int_{c_4}^{b} f(x)dx$$

Ejemplo 1: ***Calcular el área encerrada por el eje OX, las rectas*** $x=0$ ***y*** $x=\pi$ ***y la curva*** $y=\cos x$ ***.***

Vamos a ver si la función $y=\cos x$, cambia de signo en el intervalo $[0,\pi]$, para ello la igualamos a cero y calculamos sus raíces: $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$, dentro del intervalo a estudiar solo está $\frac{\pi}{2}$. Sabemos que el coseno es positivo en el primer cuadrante $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, y negativo en el segundo $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$, por tanto:

$$Area=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx=\left[senx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[senx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1-(-1)=2$$

6.1.2.- Propiedades de la integral Definida

- Si los límites de integración son iguales, la integral es nula: $\int_a^a f(x)dx=0$
- Si c es un punto interior al intervalo [a,b], se verifica: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

Esta propiedad es generalizable al tomar más puntos interiores en el intervalo [a,b].

- Al intercambiar los límites de integración, la integral definida cambia de signo: $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
- La integral definida de la suma es la suma de las integrales definidas:

$$\int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

- Si k es un número real, se verifica: $\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
- Si $f(x)\le g(x)\quad\forall x\in[a,b]$, entonces se verifica: $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b f(x)dx$

La integral definida de una función continua f(x) en un intervalo cerrado [a, b] es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva G(x) de f(x), en los extremos de dicho intervalo.

$$\boxed{\int_b^a f(x)\cdot dx = G(a) - G(b) = \left[G(x)\right]_b^a}$$

Observaciones:

- La importancia de esta regla es fundamental, ya que pone en relación las integrales con las derivadas. Sin embargo hay que advertir que ***solamente es aplicable a funciones continuas definidas en intervalos cerrados***.

- Para hallar la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado seguiremos el siguiente proceso:

  → Se halla una primitiva cualquiera de la función, sin tener en cuenta la constante (la más sencilla).
  → Se sustituyen en esta primitiva los límites de integración (el superior y el inferior) y se restan los resultados.

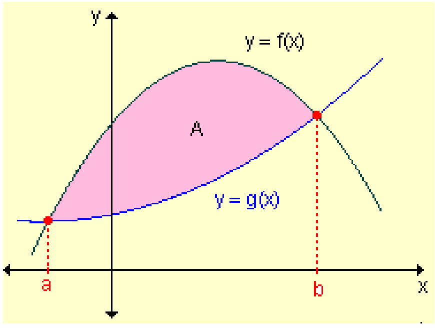
Ejemplo 2: ***Calcular el valor del área que está debajo de la función f(x)=senx en el intervalo [0,π]***

Como la función es positiva en todo el intervalo (no cambia de signo):

$$Area = \int_0^{\pi} Senxdx = \left[-Cosx\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$$

6.3.- Área limitada por dos gráficas

Para hallar el área limitada por las gráficas de dos funciones f(x) y g(x) seguiremos este esquema:



a) Definimos una nueva función h(x) = f(x) – g(x)

b) Igualamos a cero para hallar los puntos de corte entre ambas:

$$h(x)=0 \leftrightarrow f(x)=g(x)$$

c) Una vez que obtengamos los puntos de corte, a y b, integramos la función h(x) entre esos límites de integración.

$$Area = \int_b^a h(x)dx$$

Ejemplo 3: ***Calcular el área comprendida entre $f(x)=x^4+5x^3-7x^2+2x-1$ y $g(x)=x^4-4x^3-8x^2+4x-1$***

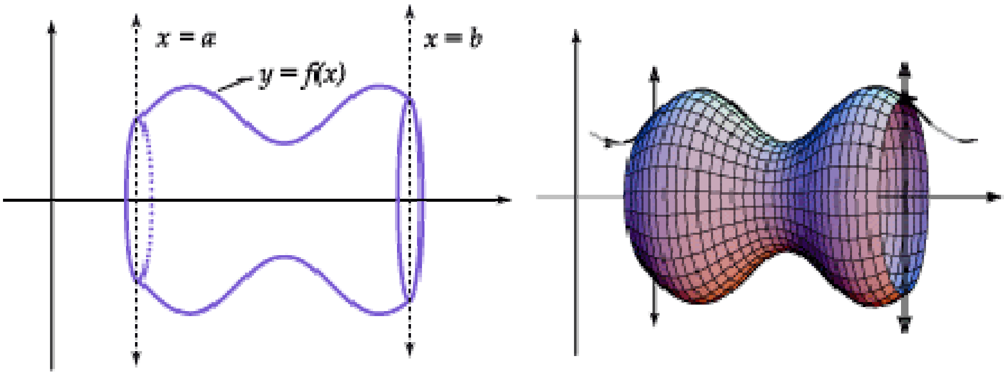
Escribimos la función h(x) como la diferencia entre f(x) y g(x). $h(x) = x^3 + x^2 - 2x$

Calculamos sus raíces igualando a cero: $h(x) = x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

$$Area = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)dx + \int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)dx = \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{1}\right| = \left|\left[0 - \frac{-8}{3}\right]\right| + \left|\left[\frac{-5}{12} - 0\right]\right| =$$
$$= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$$

6.4.- Volumen de un sólido de revolución

Sea f una función continua definida en el intervalo [a,b]. Recibe el nombre de *sólido de revolución*, al sólido generado al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x, y las gráficas de $x = a$ y $x = b$. El eje x es un eje de simetría de dicho sólido y una sección recta perpendicular al eje x es un círculo de radio $|f(x)|$.

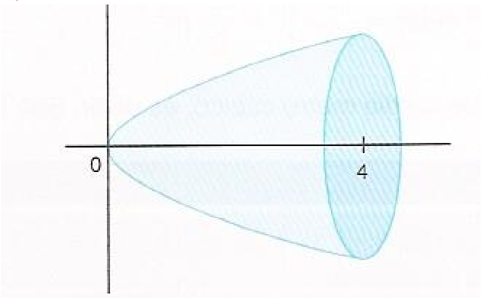


El área de la sección circular será: $A(x) = \pi \cdot [f(x)]^2$, y un elemento de volumen de revolución será un pequeño cilindro de radio $|f(x)|$ y altura dx.
Por tanto, el volumen del cuerpo de revolución vendrá dado por la expresión:

$$\boxed{Vol = \int_b^a \pi \cdot f(x)^2 dx}$$

Este procedimiento recibe el nombre de ***integración por discos***.

Ejemplo 4: ***Calcular el volumen engendrado al girar la parábola $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje X, entre 0 y 4.***

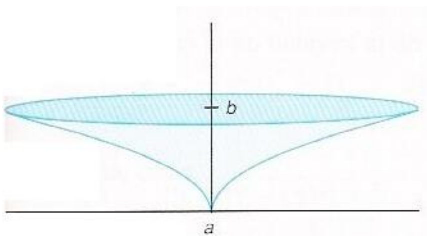


$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x \cdot dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

Si al trozo de curva $y = f(x)$ se le hace girar alrededor del eje Y, el volumen del cuerpo de revolución vendrá dado por esta otra expresión: $\boxed{Vol = \int_b^a \pi \cdot \phi(y)^2 dy}$

Se hace exactamente igual que al girar en torno al eje X, con la salvedad de que hay que escribir x en función de y, e integrar en y.

Ejemplo 5: Calcular el volumen engendrado por la curva $y = \sqrt{x}$ al girar alrededor del eje Y, entre y=0 e y=2.



$$Volumen = \pi \int_0^2 \left(y^2\right)^2 dy = \pi \int_0^2 y^4 dy = \left[\pi \frac{y^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi$$

6.5.- Teorema Fundamental de Cálculo

El Teorema fundamental del Cálculo, como su nombre lo indica es un importante resultado que relaciona el Cálculo Diferencial con el Cálculo Integral. En este capítulo se estudiarán las bases que permiten diseñar técnicas para el cálculo de integrales.

Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces su función integral $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ con $a \leq x \leq b$ es continua en [a,b] y derivable en (a,b), y su derivada F'(x)=f(x).

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ contínua en } [a,b] \\ F(X)=\int_a^x f(t)dt \end{array}\right\} F'(x)=f(x)$$

6.5.1.- Derivada de integrales

- $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Ejemplo 6: Hallar la derivada de: $\int_a^x \sqrt{t^2+1}dt$ ➔ $\frac{d}{dx}\int_a^x \sqrt{t^2+1}dt = \sqrt{x^2+1}$

6.5.2.- Derivada de integrales cuando el límite superior es una función

- $$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f\left[g(x)\right]\cdot g'(x)$$

Ejemplo 7: Hallar la derivada de: $\int_0^{t^2} \cos x^2 dx$ ➔ $\frac{d}{dt}\int_0^{t^2} \cos x^2 dx = 2t\cos t^4$

6.5.3.- Derivada de integrales cuando los dos límites son funciones

- $$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = f\left[g(x)\right]\cdot g'(x) - h\left[g(x)\right]\cdot h'(x)$$

Ejemplo 8: Hallar la derivada de: $\int_{x^2}^{x^3} \ln t dt$

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \ln t dt = \ln x^3 \cdot 3x^2 - \ln x^2 \cdot 2x = 9x^2 \ln x - 4x \ln x = (9x^2-4x)\ln x$$

Podemos encontrarnos con ejercicios como este en el que al aplicar la regla de L'Hôpital, la integral desaparece.

Ejemplo 9: Hallar $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2} sen\sqrt{t}\,dt}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2} sen\sqrt{t}\,dt}{x^3}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{senx\cdot 2x}{3x^2}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\cdot\cos x+2senx}{6x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos x-2xsenx+2\cos x}{6}=\frac{2}{3}$$

* Donde hemos utilizado varias veces la Regla de L´Hopital.

6.6.- Ejercicios Resueltos

1.- Calcula las siguientes integrales:

a) $\int_1^3 |x|dx=\int_1^3 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3=\frac{1}{2}(9-1)=4$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx\cdot\cos 2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx\cdot\left(2\cos^2 x-1\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx\cdot\cos^2 xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} senxdx=2\left[-sen^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{3}$

c) $\int_0^{\pi}(1+x^2)\cos xdx=\int_0^{\pi}\cos xdx+\int_0^{\pi}x^2\cos xdx=-2\pi$

d) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=Arcsenx-\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

$$=Arcsenx-\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=x(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} & v=-\sqrt{1-x^2}\end{bmatrix}=Arcsenx+x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}dx$$

Esta es cíclica, por tanto:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\left[\frac{Arcsenx}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[x\sqrt{1-x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

f) $\int_0^1\frac{dx}{e^x+1}=$; Calcularemos primero la primitiva:

$$\int\frac{dx}{e^x+1}=\begin{bmatrix} e^x=t & e^x dx=dt \\ & dx=\dfrac{dt}{t}\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{(t+1)\cdot t}=\int\frac{A}{t+1}dt+\int\frac{B}{t}dt\Rightarrow 1=At+B(t+1)$$

Si t=0 ➔ 1=B
Si t=-1 ➔ 1=-A

$$\int\frac{dt}{(t+1)\cdot t}=-\int\frac{1}{t+1}dt+\int\frac{1}{t}dt=-\ln|t+1|+\ln|t|$$

Si deshacemos el cambio:

$$\int_0^1\frac{dx}{e^x+1}=\left[-\ln\left(e^x+1\right)+\ln\left(e^x\right)\right]_0^1=1-\ln(e+1)-\ln(2)$$

2.- Siendo $I=\int_0^x t^2e^{-t}dt$ **, demostrar que** $\lim_{x\to+\infty} I(x)=2$

Vamos a calcular la Integral:

$$\int t^2e^{-t}dt=\begin{bmatrix} u=t^2 & du=2tdt \\ dv=e^{-t} & v=-e^{-t}\end{bmatrix}=-e^{-t}t^2+2\int te^{-t}dt=-e^{-t}t^2+\begin{bmatrix} u=2t & du=2dt \\ dv=e^{-t} & v=-e^{-t}\end{bmatrix}=$$
$$=-e^{-t}t^2-2te^{-t}+2\int e^{-t}dt=-e^{-t}t^2-2te^{-t}-2e^{-t}=-e^{-t}(t^2+2t+2)$$

Por tanto:

$$I=\int_0^x t^2e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)\right]_0^x=\left[-\frac{x^2+2x+2}{e^x}+\frac{2}{1}\right]$$

Por tanto: $\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x^2+2x+2}{e^x}+\frac{2}{1}\right]=2$ como queríamos demostrar.

3.- Calcular el área encerrada por la curva $f(x)=x^2-4x$ **y la recta** $g(x)=2x-5$

Definimos la función $h(x)=f(x)-g(x)=x^2-6x+5$
Igualamos a cero, para calcular sus puntos de corte.

$$h(x)=f(x)-g(x)=x^2-6x+5=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)(x-5)=0$$

Por tanto sus raíces son 1 y 5.

Integramos h entre 1 y 5

$$\int_1^5\left(x^2-6x+5\right)dx=\frac{-32}{3}$$

Como un área no puede ser negativa, $A=\left|\int_1^5\left(x^2-6x+5\right)dx\right|=\left|\frac{-32}{3}\right|=\frac{32}{3}$

4.- Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=1+\frac{x}{3}$ **y** $g(x)=\left(x+1\right)^{\frac{1}{2}}$

Al igual que en el ejercicio anterior, definimos la función h(x):

$$h(x)=f(x)-g(x)=1+\frac{x}{3}-\sqrt{x+1}$$

Igualamos a cero para encontrar sus puntos de corte:

$$h(x)=f(x)-g(x)=1+\frac{x}{3}-\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x=3;x=0$$

Por tanto ya tenemos los límites de integración.

$$\int_0^3\left(1+\frac{x}{3}-\sqrt{x+1}\right)dx=-\frac{1}{6}$$

Como las áreas no son nunca negativas: Área = $\left|\int_0^3\left(1+\frac{x}{3}-\sqrt{x+1}\right)dx\right|=\left|-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}$

5.- Determinar el área encerrada entre las gráficas de las funciones de ecuaciones $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$.

Como siempre, definimos la función h(x) como la diferencia entre f y g:

$$h(x) = f(x) - g(x) = 8x - 2x^2$$

Igualamos a cero para obtener los extremos de los intervalos de integración:

$$h(x) = 8x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 4$$

Por tanto: $Area = \int_0^4 \left(8x - 2x^2\right)dx = \frac{64}{3}$

6.- Calcular el área encerrada por la gráfica de $f(x) = \frac{1}{4 + x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2\sqrt{3}$ y $x = 2$

La función f(x) es siempre positiva, por tanto la integral es positiva:

Tenemos que calcular: $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{4 + x^2} = \left[\frac{1}{2}Arctg\left(\frac{x}{2}\right)\right]_2^{2\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2}Arctg\sqrt{3} - \frac{1}{2}Arctg(1)\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{24}$

7.- Calcular el área del recinto limitado por la curva de la ecuación $f(x) = x^2 + x$ y la recta perpendicular a su tangente en el punto (0,0).

Lo primero es calcular la recta tangente en el punto (0,0)

La ecuación de la recta tangente es: y = mx + b, donde m es la pendiente f'(a) y b es la ordenada en el origen b = f(a).

En este caso: f'(x)=2x + 1; f'(0)=1; f(0)=0; por tanto la recta tangente en el (0,0) es y = x

La recta perpendicular a esta es: y=-x.

Así que tenemos que calcular el área entre la gráfica f(x)= x^2 + x y g(x) = - x

Definimos la función h(x):

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 + x - (-x) = x^2 + 2x$$

Igualamos a cero para encontrar las soluciones:

$$h(x) = x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$$

Integramos la función h entre esos dos valores:

$$\int_{-2}^{0} \left(x^2 + 2x\right)dx = -\frac{4}{3}$$

Como el área no puede ser negativa:

$$Area = \left| \int_{-2}^{0} \left(x^2 + 2x\right) dx \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

8.- Se considera la función $f(x) = xe^{ax}$, donde a es una constante no nula. Calcula el valor de a, sabiendo que el área limitada por la curva $f(x) = xe^{ax}$ y las rectas x=0 y x=1 es igual a $\frac{1}{a^2}$.

Tenemos que $\int_0^1 xe^{ax} dx = \frac{1}{a^2}$; Vamos a resolver la integral:

$$\int_0^1 xe^{ax} dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{ax} & v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{bmatrix} = \frac{x}{a} e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} dx = \left[\frac{x}{a} e^{ax} - \frac{e^{ax}}{a^2} \right]_0^1 = \frac{e^a}{a} - \frac{e^a}{a^2} + \frac{1}{a^2}$$

Y según el enunciado:

$$\frac{e^a}{a} - \frac{e^a}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0; a = 1$$

Por tanto a=1, porque no puede ser igual a cero.