

ÁLGEBRA

1.- a) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & a-1 & 1 \\ a & 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$ determinar el rango de M en función del parámetro "a".

Tomamos un menor de orden: $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$.

⊙ si $a \neq \pm 1 \Rightarrow \text{ran} M > 2$ orlamos $\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a-1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^3 - a^2 - a - 1 = (1-a)(1-a^2) = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow \text{ran} M = 3 \\ \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \\ a & 1 & a+2 \end{vmatrix} = \dots \end{cases}$

⊙ si $a=1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad c_1 = c_2, \quad c_3 = \text{nula} \wedge \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \text{ran} M = 2$

⊙ si $a=-1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_2 = c_4, \quad f_1 = -f_3 \wedge \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \text{ran} M = 2$

Conclusión: $\mapsto$ si $a \neq \pm 1 \Rightarrow \text{ran} M = 3$

$\mapsto$ si $a=1 \vee a=-1 \Rightarrow \text{ran} M = 2$

b) Clasificar y resolver cuando sea posible el sistema $\begin{cases} x + ay = a \\ ax + y + (a-1)z = 1 \\ ax + y = a+2 \end{cases}$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & a-1 & 1 \\ a & 1 & 0 & a+2 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = (1-a)(1-a^2) = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$

⊙ si $a \neq 1 \wedge a \neq -1 \Rightarrow \text{ran} A = \text{ran} A^* = n = 3 \Rightarrow S.C.D$

$$x = \frac{1}{(1-a)(1-a^2)} \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 1 & 1 & a-1 \\ a+2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{a}{a-1}$$

$$y = \frac{1}{(1-a)(1-a^2)} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a-1 \\ a & a+2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{a-2}{a-1}$$

$$z = \frac{1}{(1-a)(1-a^2)} \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \\ a & 1 & a+2 \end{vmatrix} = \frac{a+1}{1-a}$$

$$\odot \text{ si } a=1 \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} c_1 = c_2, c_3 = \text{nula} \Rightarrow \text{ran} A = 1 \wedge \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \text{ran} A^* = 2 \Rightarrow S.I.$$

$$\odot \text{ si } a=-1 \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} c_2 = c_4, f_1 = -f_3 \Rightarrow \text{ran} A = \text{ran} A^* \neq 3 \wedge \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ran} A = \text{ran} A^* = 2 < n = 3 \Rightarrow S.C.I.$$

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y - 2z = 1 \end{cases} x = \lambda \Rightarrow y = \lambda + 1 \Rightarrow z = 0 \quad \text{Sol: } (\lambda, \lambda + 1, 0) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2.- a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

resolver la ecuación $A \cdot X - B \cdot C \cdot X = A$.

$$AX - BCX = A \Leftrightarrow (A - BC)X = A \Leftrightarrow X = (A - BC)^{-1} A$$

$$A - BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - BC| = -1 \Rightarrow \exists (A - BC)^{-1} \Rightarrow (A - BC)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -13 & 21 \\ 8 & -9 & 16 \\ -10 & 12 & -18 \end{pmatrix}$$

b) Sean la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y un número natural "n"

i) Calcular razonadamente D^n

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot 3 & 1 \end{pmatrix} \dots D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$$

Por inducción transfinita:

para n=2 es cierto, suponemos que se verifica para n-1, lo demostramos para n:

$$D^n = D \cdot D^{n-1} \underset{\text{por hipótesis de inducción}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(n-1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Hallar $D^{60} - D^{10}$

$$D^{60} - D^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 120 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 100 & 0 \end{pmatrix}$$

GEOMETRÍA

3.- Considerar los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$, $\pi_2 \equiv x + y - z - 2 = 0$

a) (2 puntos) Determinar la posición relativa de π_1 y π_2 .

$$\pi_1 \equiv x - y + z = 0 \quad \pi_2 \equiv x + y - z - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \Rightarrow \text{se cortan}$$

b) (2 puntos) Determinar el ángulo formado por los dos planos.

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \left| \frac{(1, -1, 1)(1, 1, -1)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 70^\circ 31' 61''$$

c) (3 puntos) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,2,3) y NO CORTA a π_1 y π_2 .

Si no corta a los planos quiere decir que es paralela a ellos y por lo tanto perpendicular

$$\text{a sus vectores normales} \Rightarrow \vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2j + 2k \approx (0, 1, 1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

d) (3 puntos) Hallar el/los puntos de la recta $s = \pi_1 \cap \pi_2$ que equidisten de A(1,2,3) y B(1,1,2)

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda + 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow P_s(1, \lambda + 1, \lambda) \text{ que equidiste de A(1,2,3) y B(1,1,2)} \Leftrightarrow d(P,A) = d(P,B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 - \lambda - 1)^2 + (3 - \lambda)^2 = (1 - \lambda - 1)^2 + (2 - \lambda)^2 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 + (3 - \lambda)^2 = \lambda^2 + (2 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$P\left(1, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

4.- Dadas las recta $r \equiv \begin{cases} x = (a+2)\lambda \\ y = 1 \\ z = a \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{a-x}{1} = \frac{y-2}{a^3} = \frac{z-a}{a-1}$

a) (3 puntos) Determinar su posición relativa según los valores del parámetro "a".

$$\begin{cases} \vec{u}_r(a+2, 0, 0) \\ P_r(0, 1, a) \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{u}_s(-1, a^3, a-1) \\ P_s(a, 2, a) \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r \parallel \vec{u}_s \Leftrightarrow \frac{a+2}{-1} = \frac{0}{a^3} = \frac{0}{a-1} \Rightarrow a+2=0 \Leftrightarrow a=-2$$

⊙ si $a = -2 \Rightarrow r$ y s deberían ser paralelas o coincidentes, pero para $a=-2$ el vector director de r queda $(0,0,0)$ que es imposible $\Rightarrow$ la recta r no está definida para este valor de a .

⊙ si $a \neq -2 \Rightarrow r$ y s se cortan o se cruzan.

$$\text{Estudiamos } \text{ran}(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) \begin{vmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ -1 & a^3 & a-1 \\ a & 1 & \end{vmatrix} = (1-a)(a+2) = 0 \Rightarrow a=1 \vee a=-2,$$

como para $a=-2$ no está definida r , será:

$\rightarrow$ si $a=1 \text{ ran}(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = 2 \Rightarrow$ se cortan. $\rightarrow$ si $a \neq 1 \wedge a \neq -2 \text{ ran}(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = 3 \Rightarrow$ se cruzan.

b) (3 puntos) Para $a = 2$, calcular la distancia entre r y s .

$$\text{Para } a=2 \begin{cases} \vec{u}_r(4, 0, 0) \approx (1, 0, 0) \\ P_r(0, 1, 2) \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{u}_s(-1, 8, 1) \\ P_s(2, 2, 2) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s}(2, 1, 0) \Rightarrow d(r, s) = \frac{\left\| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right\|}{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix} \right\|} = \frac{|-1|}{|(0, -1, 8)|} = \frac{\sqrt{65}}{65}$$

c) (4 puntos) Para $a = 2$, hallar la ecuación de la recta perpendicular a ambas.

$$\text{Para } a=2 \begin{cases} \vec{u}_r(4, 0, 0) \approx (1, 0, 0) \\ P_r(0, 1, 2) \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{u}_s(-1, 8, 1) \\ P_s(2, 2, 2) \end{cases}$$

$$\text{Sea } t \text{ la recta buscada, por ser perpendicular a } r \text{ y } s \Rightarrow \vec{u}_t = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -j + 8k$$

$$\bullet \pi_1 \equiv \begin{cases} r \subset \pi_1 \Leftrightarrow \vec{u}_r(1, 0, 0), P_r(0, 1, 2) \\ t \subset \pi_1 \Leftrightarrow \vec{u}_t(0, -1, 8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv -8y - z + 10 = 0$$

$$\bullet \pi_2 \equiv \begin{cases} s \subset \pi_2 \Leftrightarrow \vec{u}_s(-1, 8, 1), P_s(2, 2, 2) \\ t \subset \pi_2 \Leftrightarrow \vec{u}_t(0, -1, 8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ -1 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 65x + 8y + z - 148 = 0$$

$$\text{La recta pedida es } \pi_1 \cap \pi_2 \Leftrightarrow t \equiv \begin{cases} 8y + z - 10 = 0 \\ 65x + 8y + z - 148 = 0 \end{cases}$$