

Problema 1 (3 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^3 + 3x^2, \quad g(x) = x + 3$$

1. Esboza las gráficas de f y de g calculando sus puntos de corte.
2. Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de f y g .

(Andalucía Junio 2007)

Solución:

1. Estudiamos las gráficas

■

$$f(x) = x^3 + 3x^2 = 0 \implies x^2(x + 3) = 0 \implies x = 0, \quad x = -3$$

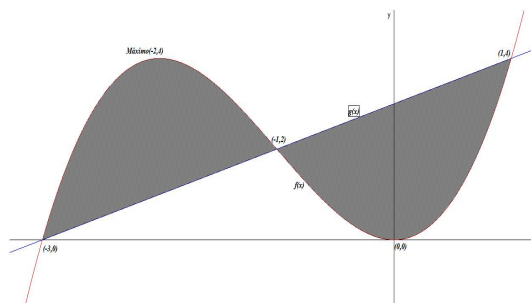
$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \implies 3x(x + 2) = 0 \implies x = 0, \quad x = -2$$

$$f''(x) = 6x + 6 \implies \begin{cases} f''(0) = 6 > 0 \implies (0, 0) \text{ Mínimo} \\ f''(-2) = -6 < 0 \implies (-2, 4) \text{ Máximo} \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x + 6 = 0 \implies x = -1$$

$$f'''(x) = 6 \implies f'''(-1) = 6 \neq 0 \implies (-1, 2) \text{ Punto de Inflexión}$$

- $g(x) = x + 3$ es una recta que pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(-3, 0)$
- Las dos funciones se cortan en los puntos donde $f(x) = g(x) \implies x^3 + 3x^2 = x + 3 \implies x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \implies (-3, 0), (-1, 2)$ y $(1, 4)$.



2.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (x^3 + 3x^2 - x - 3) dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x$$

$$S_1 = \left| \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-3}^{-1} \right| = |4| = 4u^2$$

$$S_2 = \left| \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-1}^1 \right| = |-4| = 4u^2$$

Problema 2 (2 puntos) Resolver el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

(Castilla-León Junio 2007)

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \\ \left[\frac{0}{0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x) \ln(1+x) + x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x) + 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Problema 3 (2 puntos) Hallar a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} a + x \ln x & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(\pi x)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

sea continua en todo R .

(Castilla-León Junio 2007)

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \cos(\pi x)}{1} = \pi \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (a + x \ln x) = a + \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = a + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \\ \left[\frac{\infty}{\infty} \right] &= a + \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = a \\ f(0) &= b \end{aligned}$$

Luego, para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ se tiene que cumplir: $a = b = \pi$.

Problema 4 (4 puntos) Se pide:

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calcula a para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$. Para el valor obtenido de a ¿es $f(x)$ derivable en $x=2$?

2. Dada la función $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcular los valores de a, b, c para $g(x)$ tenga en el punto $(1, -1)$ un mínimo relativo y la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en $x = 0$, sea paralela a la recta $y = 4x$

(Galicia Junio 2007)

Solución:

- 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 1) = 4a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (e^{2-x} + 2) = 3$$

$$4a + 1 = 3 \implies a = \frac{1}{2} \implies f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ -e^{2-x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(2^-) = -2 \\ f'(2^+) = -1 \end{cases}$$

Como $f'(2^-) \neq f'(2^+)$ la función no es derivable en $x = 2$.

- 2.

$$\begin{cases} g(1) = -1 \implies a + b + c = -1 \\ g'(1) = 0 \implies 4a + b = 0 \\ g'(0) = 4 \implies b = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{cases}$$

Problema 5 (2 puntos) Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$$

(Navarra Junio 2007)

Solución: Por descomposición polinómica:

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3} = \frac{A(x + 3) + B(x - 2)}{x^2 + x - 6}$$

$$\begin{cases} 1 = A(x+3) + B(x-2) \\ x = -3 : 1 = -5B \implies B = -1/5 \\ x = 2 : 1 = 5A \implies A = 1/5 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{1}{5} (\ln(x-2) - \ln(x+3))$$

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx = \frac{1}{5} \ln \frac{x-2}{x+3}$$