

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 0$.
- j) Calcular el área encerrada por la gráfica de f el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 0$.

Solución:

- a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- b) Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 + 3 = 0 \implies$ No hay puntos de corte con OX .
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -3 \implies (0, -3)$.
- c)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
signo	$-$	$+$

d) $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ la función no tiene simetrías.

e) Asíntotas:

■ **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

■ **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \infty$$

■ **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x - 1} - x \right) = 1$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x + 1$

f)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = 0 \implies x = -1, \quad x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1) \cup (1, 3)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo en $(3, 6)$.

g)

$$f''(x) = \frac{8}{(x - 1)^3} \neq 0$$

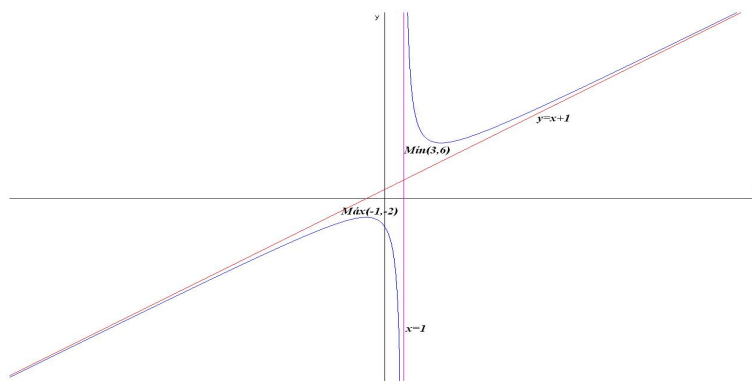
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

Cóncava: $(1, +\infty)$

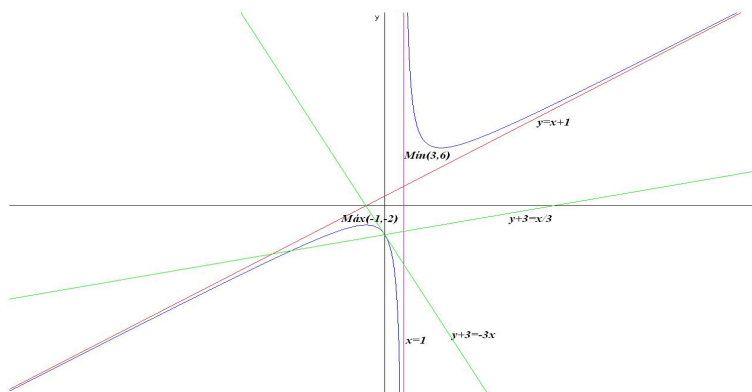
Convexa: $(-\infty, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$:

Como $m = f'(1) = -3$ tenemos que



Recta Tangente : $y + 3 = -3x$

$$\text{Recta Normal : } y + 3 = \frac{1}{3}x$$

Como $f(0) = -3$ las rectas pasan por el punto $(0, -3)$.

j)

$$\int_{-1}^0 \frac{x^2 + 3}{x - 1} dx = \left. \frac{x^2}{2} + x + 4 \ln |x - 1| \right|_{-1}^0 = \frac{1}{2} - 4 \ln 2 = -2,27$$

$$S = \left| \frac{1}{2} - 4 \ln 2 \right| = 4 \ln 2 - \frac{1}{2} = 2,27 \text{ u}^2$$

