

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \implies x^2 - 16 = 0 \implies x = \pm 4 \implies (4, 0) \ (-4, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = \text{no existe}$, luego no hay.

c)

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
signo	$-$	$+$	$-$	$+$

d) $f(-x) = -f(x) \implies$ Es IMPAR.

e) Asíntotas:

■ **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 16}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 16}{x} = \left[\frac{-16}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 16}{x} = \left[\frac{-16}{0^+} \right] = -\infty$$

■ **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 16}{x} = \infty$$

■ **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 16}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 16}{x} - x \right) = 0$$

$y = x$

f)

$$f'(x) = \frac{x^2 + 16}{x^2} \neq 0 \implies \text{No hay extremos}$$

$$f'(x) > 0 \implies f \text{ creciente en } \mathbb{R} - \{0\}$$

g)

$$f''(x) = \frac{-32}{x^3} \neq 0$$

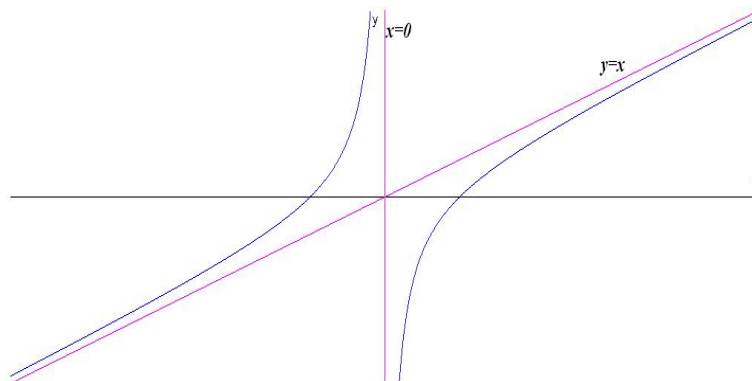
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y''	+	-
y	cóncava	convexa

Cóncava: $(-\infty, 0)$

Convexa: $(0, +\infty)$

h) Representación:



- i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$:

Como $f(2) = -6$ las rectas pasan por el punto $(2, -6)$.

Como $m = f'(2) = 5$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y + 6 = 5(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal : } y + 6 = -\frac{1}{5}(x - 2)$$

