

Problema 1 Dada la función $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$, determina

- a) Dominio
- b) Puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Signo de la función.
- d) Simetrías.
- e) Asíntotas.
- f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- g) Máximos y mínimos relativos.
- h) Curvatura.
- i) Puntos de Inflexión.
- j) Tangente a la curva en el punto $x = 2$
- k) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.
- l) El área determinada por la gráfica de la curva, el eje OX y las rectas $x = -1/2$ y $x = 1/2$

Solución:

- a) $Dom(f) = R - \{\pm 1\}$.
- b) Los puntos de corte serán los siguientes:

Si $x = 0 \implies (0, 0)$ y si $f(x) = 0 \implies (0, 0)$.

c)

$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$

- d) La función es IMPAR
- e) Asíntotas:

- Verticales: Las únicas posibles son $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

y $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 1} - 2x \right) = 0$$

$$y = 2x$$

f) Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \implies x = 0, x = \pm\sqrt{3} \implies$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Crece	Decrece	Crece

La función crece en el intervalo: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ y decrece en el intervalo: $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

- g) Máximos y mínimos relativos: A la vista del apartado anterior, la función presenta Máximo en el punto $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ y un Mínimo en el punto $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$.

h) Curvatura:

$$f''(x) = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa	Cóncava

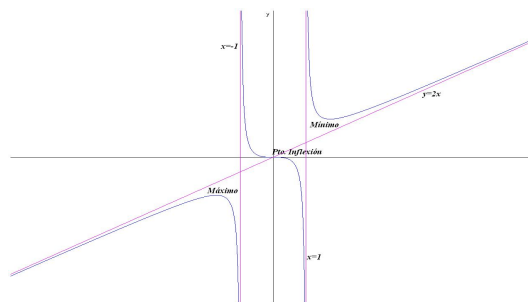
i) Hay un punto de Inflexión en $(0,0)$.

j) $a = 2 \implies b = f(2) = 16/3$

$$m = f'(2) = 8/9 \implies y - \frac{16}{3} = \frac{8}{9}(x - 2), \text{ recta tangente}$$

$$y - \frac{16}{3} = -\frac{9}{8}(x - 2), \text{ recta normal}$$

k) Representación gráfica:



l) Área:

$$\int \frac{2x^3}{x^2-1} dx = x^2 + \ln|x^2-1| + C$$

$$S_1 = \int_{-1/2}^0 \frac{2x^3}{x^2-1} dx = -\frac{1}{4} - \ln \frac{3}{4} = 0,03768207245$$

$$S_2 = \int_0^{1/2} \frac{2x^3-8}{x^2-1} dx = \frac{1}{4} + \ln \frac{3}{4} = -0,03768207245$$

$$S = |S_1| + |S_2| = -\frac{1}{2} - 2 \ln \frac{3}{4} = 0,07536414490 \text{ u}^2$$

