

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes y dominio de definición.
2. Simetría.
3. Asíntotas.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.
7. Representación aproximada.
8. Área encerrada entre la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 6$.

Solución:

1.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \implies x^3 = 0 \implies x = 0$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies (0, 0)$.
- $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

2. $f(-x) \neq f(x) \implies$ No es PAR.

$$f(-x) \neq -f(x) \implies \text{No es IMPAR.}$$

3. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} - x \right) = 2$$

$$y = x + 2$$

4.

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \implies x = 3, x = 0$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	crece	decrece	crece

5. La función tiene un mínimo en el punto $(3, 6.75)$, en el punto donde $x = 0$ la función pasa de crecer a crecer, luego no es ni máximo ni mínimo, y en el punto $x = 1$ hay una asíntota, luego tampoco puede ser ni máximo ni mínimo.

6.

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

Como el denominador es siempre positivo, bastará con estudiar el numerador

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y''	-	+
y	convexa	cóncava

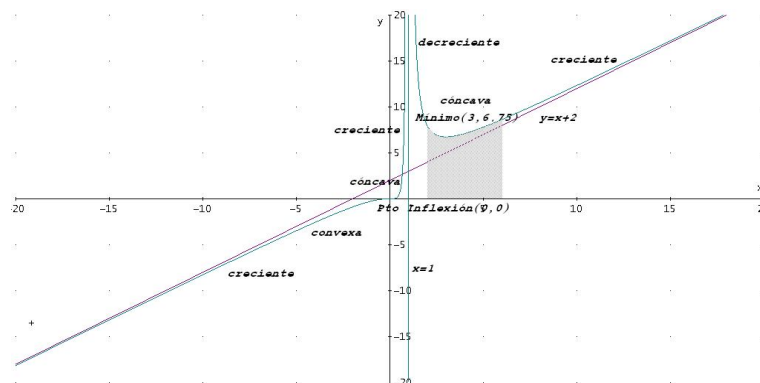
En el punto $(0, 0)$ la gráfica pasa de ser convexa a ser cóncava y hay continuidad en ese punto, por lo que estamos ante un punto de inflexión.

Por el criterio de la tercera derivada sería

$$f'''(x) = 6(3x+1)(1-x)^5 \implies f'''(0) = -\frac{6}{5} \neq 0$$

Luego en $x = 0$ hay un punto de inflexión.

7. Representación



8.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \int (x+2) dx + \int \frac{2x-4}{(x-1)^2} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x-1} + 3 \ln |x-1| + C
 \end{aligned}$$

Voy a resolver la integral. Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador divimos y nos queda

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{x^2-2x+1}$$

Esta última fracción la descomponemos en dos

$$\frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$$3x-2 = (x-1)A+B \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow 1=B \\ x=0 \Rightarrow -2=-A+B \end{cases} \Rightarrow A=3, B=1$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx &= \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = 3 \ln |x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \\
 &= 3 \ln |x-1| - \frac{1}{x-1}
 \end{aligned}$$

Luego

$$F(x) = \int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{x-1} + 3 \ln |x-1|$$

$$S = |F(6)| + |F(2)| = \frac{124}{5} + 3 \ln 5 = 29.62831373 u^2$$