

Problema 1 (4 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$$

se pide:

1. Dominio.
2. Corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Máximos y mínimos.
6. Dibujo aproximado de la gráfica.

Nota: Una función es simétrica respecto al eje Y si $f(-x) = f(x)$, y simétrica respecto al origen si $f(-x) = -f(x)$.

Solución:

1. $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
2. (a) Puntos de corte con el eje Y:
 $x = 0 \implies f(x) = -\frac{3}{4} \implies$ la gráfica corta al eje Y en $(0, -\frac{3}{4})$.
(b) Puntos de corte con el eje X:
 $f(x) = 0 \implies x^2 + 3 = 0 \implies x = \pm\sqrt{-3} \implies$ la ecuación no tiene soluciones reales y por tanto la gráfica no corta al eje X en ningún punto.
3. $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 3}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = f(x) \implies$ la función es simétrica respecto al eje Y.
- 4.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x - 6x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-14x}{(x^2 - 4)^2}$$

Como $(x^2 - 4)^2 \geq 0$ para cualquier x , bastará estudiar el signo del numerador:

(a) Si $x < 0 \implies f'(x) > 0 \implies$ creciente.

(b) Si $x > 0 \implies f'(x) < 0 \implies$ decreciente.

En el dominio de la función tendremos que la función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y es decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

5. $f'(x) = 0 \implies -14x = 0 \implies x = 0$ que corresponde al punto $(0, -\frac{3}{4})$, punto en el que la gráfica pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, estamos ante un máximo.

6. Su representación gráfica sería:

Calculado las asíntotas, las habríamos encontrado verticales en $x = -2$ y $x = 2$, y horizontales en $y = 1$, ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 1$.

Problema 2 (4 puntos)

1. Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot e^{x^2}}{-\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2}}{-\cos x} = \\ &= -2. \end{aligned}$$

2. Determina el valor de a para que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{ax} = e$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{ax} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{ax} = [1^\infty] = e^\lambda \\ \lambda &= \lim_{x \rightarrow \infty} ax \left(\frac{x+3}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} ax \left(\frac{3}{x} \right) = 3a \end{aligned}$$

$$\text{Como } \lambda = 1 \implies 3a = 1 \implies a = \frac{1}{3}.$$

3. Calcular utilizando el cambio de variable adecuado :

$$\int \frac{x}{(1-2x^2)^2} dx$$

Solución:

Hacemos $u = 1 - 2x^2 \implies du = -4x \cdot dx \implies \frac{du}{-4} = x \cdot dx$ y sustituimos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(1-2x^2)^2} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{1}{4u} + C = \frac{1}{4(1-2x^2)} \\ &+ C \end{aligned}$$

Problema 3 (2 puntos) Determina los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que estén a distancia mínima del punto $(4, 0)$.

Solución:

Un punto genérico de la gráfica sería de la forma $(x, \sqrt{4x})$, y la distancia de este punto al $(4, 0)$ será:

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{4x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

Tendremos que calcular los mínimos de esta función, y para ello calculamos la primera derivada.

$$d' = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 16)^{-1/2}(2x - 4) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 16}} = 0 \implies x = 2$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada primera. Como el denominador es siempre positivo, basta estudiar el numerador:

Si $x < 2 \implies d' < 0 \implies$ decrece

Si $x > 2 \implies d' > 0 \implies$ crece

Con ésto concluimos con que en la abcisa $x = 2$ tenemos un mínimo, calculamos ahora las ordenadas correspondientes sustituyendo en la función $y^2 = 4x$, y obtenemos: $y = \pm\sqrt{4x} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.

Tenemos, por tanto, dos puntos que cumplen la condición de mínimo $(2, -2\sqrt{2})$ y $(2, 2\sqrt{2})$.



