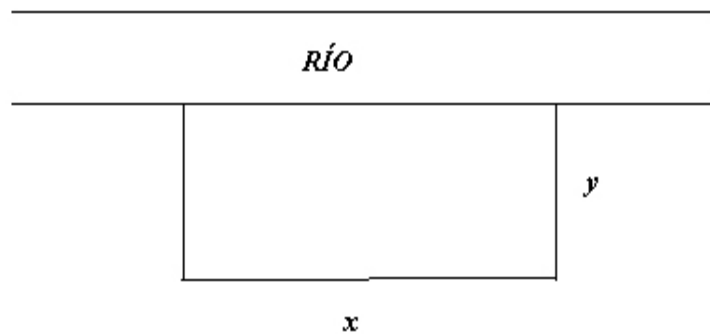


Problema 1 Quieres vallar una parcela rectangular en el que uno de los lados da a un río. Calcular las dimensiones que debes dar a esa parcela para que encerrando un área de $1000m^2$ gastes la mínima cantidad de alambre.

Solución: Representación Gráfica:



$$S = x \cdot y = 1000 \implies y = \frac{1000}{x}$$

$$L = x + 2y = x + \frac{2000}{x} \implies L' = 1 - \frac{2000}{x^2} = 0 \implies$$

$$x = \sqrt{2000} = 44,72135954 \text{ m}$$

$$L'' = \frac{4000}{x^3} \implies S''(44,72135954) = 0,04472135957 > 0 \implies \text{Mínimo}$$

$$y = \frac{1000}{\sqrt{2000}} = 22,36067977 \text{ m}$$

Problema 2 dada la función

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de Corte.

3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonía.
6. Máximos y Mínimos.
7. Concavidad.
8. Representación Gráfica.
9. El área encerrada entre la gráfica, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Solución:

1. Dominio: $Dom f = R - \{1\}$
2. Puntos de Corte: $(0, 0)$
3. Simetrías:

$$f(-x) = \frac{-2x}{-x-1} \Rightarrow \text{No hay}$$

4. Asíntotas:

(a) Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

(b) Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

5. Monotonía:

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

Luego la función es siempre decreciente.

6. Máximos y Mínimos: La función no tiene ni máximos ni mínimos, ya que la primera derivada no se anula nunca.

7. Concavidad:

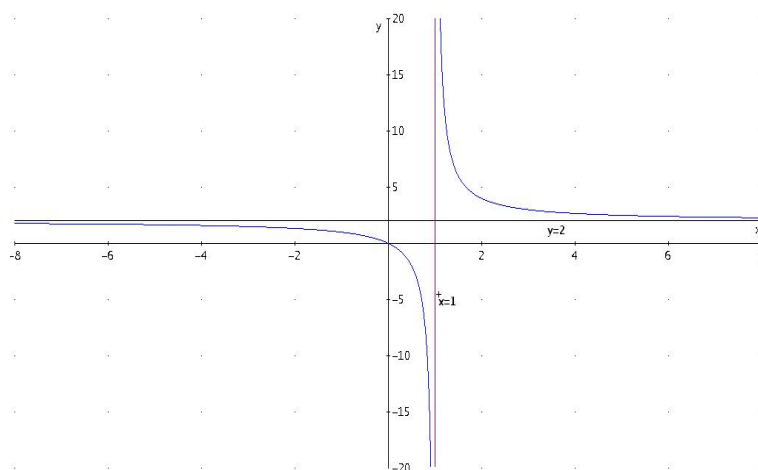
$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

El signo depende del denominador $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$:

$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$-$	$+$
decreciente	creciente

Como la segunda derivada no se anula nunca no hay puntos de inflexión.

8. Representación Gráfica:



9. El área encerrada entre la gráfica, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$:

$$\int_2^3 \frac{2x}{x-1} = \int_2^3 2 dx + \int_2^3 \frac{2}{x-1} = 2x + 2 \ln(x-1)]_2^3 = 2 + 2 \ln 2 = 3,386294361$$

Problema 3 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + mx & \text{si } x < 1 \\ nx^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. determina m y n para que se cumplan la hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[-1, 3]$.
2. Halla los puntos del intervalo que garantiza dicho teorema.

Solución:

1. Para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio la función debe de ser continua en el intervalo $[-1, 3]$ y derivable en el intervalo $(-1, 3)$.

(a) Continuidad:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x + m = 2 + m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} nx^2 - 1 = n - 1$$

Para que la función sea continua será:

$$2 + m = n - 1 \implies m - n = -3$$

(b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 2nx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable será:

$$f'(1^-) = f'(1^+) \implies 2n = 2 \implies n = 1$$

Luego los valores buscados son $m = -2$ y $n = 1$.

2. El teorema concluye con que $\exists c \in [-1, 3]$ de manera que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{8 - 4}{4} = 1$$

$f'(c) = 2 \neq 1$ si $c < 1$ luego en esta rama no hay solución.

$f'(c) = 2c = 1$ si $c \geq -1 \implies c = 1/2$ solución que vale por ser un punto interior del intervalo.