

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes y dominio de definición.
2. Simetría.
3. Asíntotas.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.
7. Representación aproximada.
8. Área encerrada entre la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 6$.

Solución:

1.

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \implies (x-1)^3 = 0 \implies x = 1$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies$ No hay.
- $Dom(f) = R - \{0\}$

2. $f(-x) \neq f(x) \implies$ No es PAR.

$$f(-x) \neq -f(x) \implies \text{No es IMPAR.}$$

3. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2} - x \right) = -3$$

$$y = x - 3$$

4.

$$f'(x) = \frac{(x+2)(x-1)^2}{x^3} = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	crece	decrece	crece

Crece: $(-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$

Decrece: $[-2, 0)$

5. La función tiene un máximo en el punto $(-2, -6.75)$, en el punto donde $x = 1$ la función pasa de crecer a decrecer, luego no es ni máximo ni mínimo, y en el punto $x = 0$ hay una asíntota, luego tampoco puede ser ni máximo ni mínimo.

6.

$$f''(x) = \frac{6(x-1)}{x^4}$$

Como el denominador es siempre positivo, bastará con estudiar el numerador

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
y''	-	+
y	convexa	cóncava

Convexa: $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

Cóncava: $[1, +\infty)$

En el punto $(1, 0)$ la gráfica pasa de ser convexa a ser cóncava y hay

continuidad en ese punto, por lo que estamos ante un punto de inflexión.

Por el criterio de la tercera derivada sería

$$f'''(x) = 6(4 - 3x)x^5 \implies f'''(1) = 6 \neq 0$$

Luego en $x = 1$ hay un punto de inflexión.

7. Representación



8.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx = \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2} dx = \\ &= \int \left(x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 3 \ln |x| + \frac{1}{x} + C \\ \text{Área} &= |F(6) - F(2)| = \frac{11}{3} + 3 \ln 3 = 6.962503532 u^2 \end{aligned}$$