

Problema 1 Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4}$. Se pide:

1. Hallar los intervalos donde esta función es creciente y donde es decreciente.
2. Hallar las asíntotas.
3. Hacer una gráfica de la función.
4. Área encerrada entre la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

(Islas Baleares 2005)

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	crece	decrece

Como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ tendremos:

Crece: $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

Decrece: $(0, \infty)$

Esta claro que, en el punto $(0, 3/4)$ hay un máximo, ya que en él la gráfica pasa de crecer a decrecer.

2. Asíntotas:

• **Verticales:**

$$x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

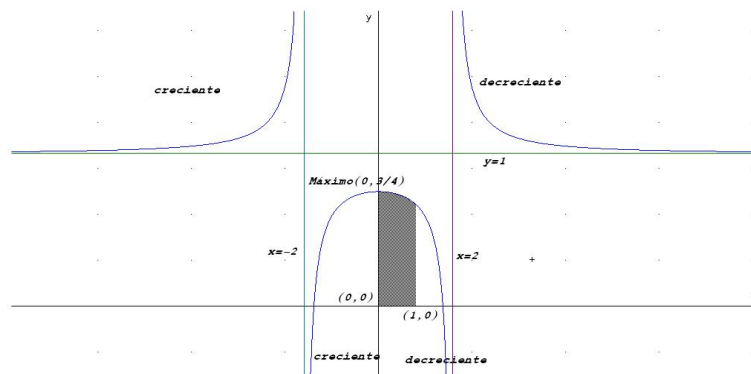
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay, ya que hemos encontrado asíntotas horizontales.

3. Representación



4.

$$F(x) = \int \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} dx = x + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x - 2}{x + 2} \right)$$

Voy a resolver la integral. Como el grado del polinomio del numerador es igual que el del denominador divimos y nos queda

$$\frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = 1 + \frac{1}{x^2 - 4}$$

Esta última fracción la descomponemos en dos

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}$$

$$1 = (x + 2)A + (x - 2)B \implies \begin{cases} x = 2 \implies 1/4 = A \\ x = -2 \implies -1/4 = B \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} dx &= \int x dx + \int \frac{1/4}{x - 2} dx + \int \frac{-1/4}{x + 2} dx = x + \frac{1}{4} \ln |x - 2| - \frac{1}{4} \ln |x + 2| = \\ &= x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| \end{aligned}$$

Luego

$$F(x) = x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right|$$

$$S = |F(1)| + |F(0)| = \left(1 - \frac{\ln 3}{4}\right) - (0) = 1 - \frac{\ln 3}{4} = 0.7253469278 \, u^2$$