

Problema 1 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 5ax^2 - 2bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ 3ax^2 + bx - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b , hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (5ax^2 - 2bx + 1) = 5a - 2b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3ax^2 + bx - 2) = 3a + b - 2 \end{cases} \implies 2a - 3b = -3$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b , hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 10ax - 2b & \text{si } x < 1 \\ 6ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(1^-) = 10a - 2b \\ f'(1^+) = 6a + b \end{cases} \implies 4a - 3b = 0$$

- 3.

$$\begin{cases} 2a - 3b = -3 \\ 4a - 3b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3/2 \\ b = 2 \end{cases}$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{15}{2}x^2 - 4x + 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{9}{2}x^2 + 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 15x - 4 & \text{si } x < 1 \\ 9x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El

Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ que cumple

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{19}{2}.$$

Si cogemos la primera rama $c < 1$:

$$f'(c) = 15c - 4 = 19/2 \implies c = 9/10 \text{ si vale}$$

Si cogemos la segunda rama $c \geq 1$:

$$f'(c) = 9c + 2 = 19/2 \implies c = 5/6 \text{ no vale}$$

El punto $c \in (0, 2)$ al que hace referencia el teorema es $c = 9/10$.

Problema 2 Hallar una función polinómica de tercer grado tal que pasa por el punto $(0, 4)$, tenga un extremo relativo en el punto $(3, -50)$ y un punto de inflexión en $x = 1$. Decidir si el extremo es un máximo o un mínimo.

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\begin{cases} f(0) = 4 \implies d = 4 \\ f(3) = -50 \implies 27a + 9b + 3c + d = -50 \\ f'(3) = 0 \implies 27a + 6b + c = 0 \\ f''(1) = 0 \implies 6a + 2b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \\ c = -18 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 4 \implies f'(x) = 6x^2 - 12x - 18 \implies f''(x) = 12x - 12$$

$$f''(3) = 36 - 12 = 24 > 0 \implies \text{el extremo en el punto } (3, -50) \text{ es un mínimo.}$$

Problema 3 Se pide:

1. Hallar el área encerrada por las funciones $f(x) = 3x^2 + x - 3$ y $g(x) = x^2 - 3x + 3$.
2. Calcular el volumen de revolución formado por la gráfica de la función f al girar sobre el eje OX en el intervalo $[0, 1]$.

Solución:

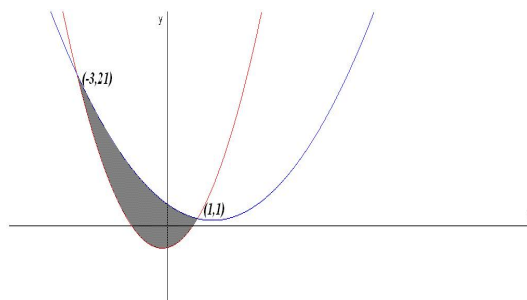
1.

$$f(x) = g(x) \implies 3x^2 + x - 3 = x^2 - 3x + 3 \implies x = -3, \quad x = 1$$

$$H(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (2x^2 + 4x - 6) dx = \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 6x$$

$$S = \int_{-3}^1 (f(x) - g(x)) dx = H(1) - H(-3) = -\frac{64}{3}$$

$$S = |S| = \frac{64}{3} u^2$$



2.

$$V = \pi \int_0^1 (3x^2 + x - 3)^2 dx = \pi \int_0^1 (9x^4 + 6x^3 - 17x^2 - 6x + 9) dx =$$

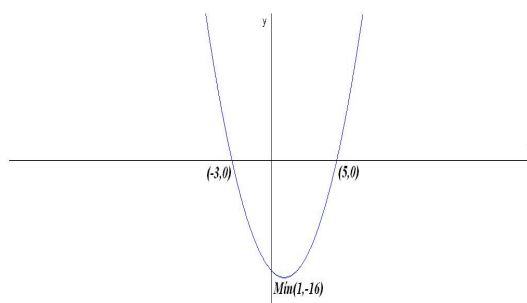
$$\left[\frac{9x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} - \frac{17x^3}{3} - 3x^3 + 9x \right]_0^1 = \frac{109\pi}{30} u^3$$

Problema 4 Dada la función $f(x) = |x^2 - 2x - 15|$ se pide:

1. Representación gráfica de forma aproximada y su forma como una función definida por ramas
2. Estudiar su continuidad y derivabilidad a la vista del estudio anterior.

Solución:

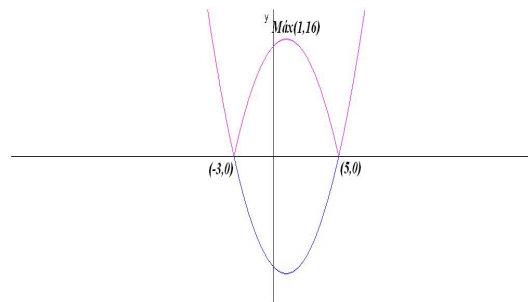
1. Llamamos $g(x) = x^2 - 2x - 15$ y la representamos gráficamente:



La función $f(x) = |x^2 - 2x - 15|$ no puede tener recorrido por debajo del eje de abscisas. Esta función sería:

Luego:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 15 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 + 2x + 15 & \text{si } -3 \leq x < 5 \\ x^2 - 2x - 15 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$



2. Claramente y a la vista de la gráfica la función es continua en todo R pero no sería derivable en los puntos $x = -3$ y $x = 5$ donde presenta picos. En esos picos podríamos trazar infinitas tangentes a la gráfica de f .

Problema 5 Estudiar la derivabilidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x}{x-3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y dibuja una representación gráfica aproximada.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

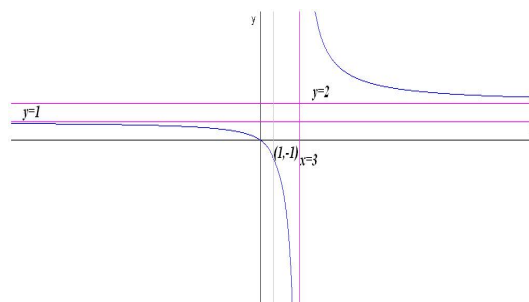
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x-3} = -1 \implies f \text{ continua en } x = 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

En la rama $x < 1$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 1$ la función es discontinua en $x = 3$ donde tiene una asíntota. Luego la función es continua en $R - \{3\}$.

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(x-2)^2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{-6}{(x-3)^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = -2 \neq f'(1^+) = -3/2 \implies f \text{ no es derivable en } x = 1.$$



En conclusión f es continua en $R - \{3\}$ y derivable en $R - \{1, 3\}$.