

Problema 1 Determinar una función f polinómica de cuarto grado y que cumpla las siguientes condiciones:

1. la recta $y = 3$ es tangente a f en el punto de abscisa $x = 1$.
2. tiene un extremo en el punto $(-1, 2)$
3. pasa por el origen de coordenadas

Solución:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

1. $f(1) = 3$ y $f'(1) = 0$
2. $f(-1) = 2$ y $f'(-1) = 0$
3. $f(0) = 0$

Tenemos, por tanto:

$$\begin{cases} f(1) = 3 \implies a + b + c + d + e = 3 \\ f'(1) = 0 \implies 4a + 3b + 2c + d = 0 \\ f(-1) = 2 \implies a - b + c - d = 2 \\ f'(-1) = 0 \implies -4a + 3b - 2c + d = 0 \\ f(0) = 0 \implies e = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -5/2 \\ b = -1/4 \\ c = 5 \\ d = 3/4 \\ e = 0 \end{cases}$$

La función es:

$$f(x) = -\frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 5x^2 + \frac{3}{4}x$$

Problema 2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - ax + b}{x} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{ax^2 - bx}{x + 2} & \text{si } -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Calcular a y b de manera que f cumpla las condiciones del "Teorema del Valor Medio" en el intervalo $[-2, 2]$ y calcular aquellos puntos, cuya existencia afirma el Teorema.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b , hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = -1$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - ax + b}{x} = -(a + b + 1) \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{ax^2 - bx}{x+2} = a + b \end{cases} \implies 2a + 2b = -1$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b , hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = -1$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - b}{x^2} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{ax^2 + 4ax - 2b}{(x+2)^2} & \text{si } -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(-1^-) = 1 - b \\ f'(-1^+) = -3a - 2b \end{cases} \implies 3a + b = -1$$

3.

$$\begin{cases} 2a + 2b = -1 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1/4 \\ b = -1/4 \end{cases}$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 + x - 1}{4x} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{x(1-x)}{4(x+2)} & \text{si } -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 + 1}{4x^2} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ -\frac{x^2 + 4x - 2}{4(x+2)^2} & \text{si } -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[-2, 2]$ y derivable en el $(-2, 2)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (-2, 2)$ que cumple

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{-1/8 - (-13/8)}{4} = \frac{3}{8}.$$

Si cogemos la primera rama

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 1}{4x^2} = \frac{3}{8} \implies \text{sin solución}$$

Si cogemos la segunda rama

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 4x - 2}{4(x+2)^2} = \frac{3}{8} \implies \begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{15}}{5} - 2 = -3549193338 \\ x = \frac{2\sqrt{15}}{5} - 2 = -0,4508066615 \end{cases}$$

Luego el único punto sería $c = -0,4508066615$

Problema 3 Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que uno de ellos tenga longitud doble de otro y tal que al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo. **Solución:** Tenemos tres trozos de longitudes: x , $2x$ e $y = 140 - 3x$

Con x haremos un cuadrado de área $S_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$

Con $2x$ haremos un cuadrado de área $S_2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2$

Con $y = 140 - 3x$ haremos un cuadrado de área $S_3 = \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \left(\frac{140 - 3x}{4}\right)^2$

La función a optimizar sería:

$$S(x) = S_1 + S_2 + S_3 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{140 - 3x}{4}\right)^2 = \frac{7x^2 - 420x + 9800}{8}$$

$$S'(x) = \frac{14x - 420}{8} \implies x = 30$$

$$S''(x) = \frac{7}{4} \implies S''(30) = \frac{7}{4} > 0 \implies \text{Mínimo}$$

La longitud de los trozos serán 30, 60 y 50 m. respectivamente.