

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

- a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
- b) Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \implies x^2 + 1 = 0 \implies$ No hay.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -1 \implies (0, 1)$.
- c)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
signo	+	-	+

- d) $f(-x) = f(x) \implies$ Es PAR.
- e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay al haber horizontales.

f)

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	-
y	Creciente	Decreciente

La función es decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, \infty)$ y creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Con un Máximo en el punto $(0, 1)$

g)

$$f''(x) = \frac{4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3} \neq 0$$

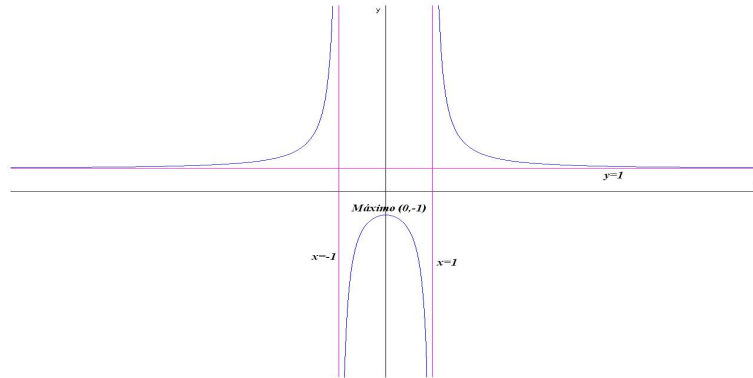
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
y''	+	-	+
y	cóncava	convexa	cóncava

Cóncava: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Convexa: $(-1, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$:

Como $f(2) = \frac{5}{3}$ las rectas pasan por el punto $\left(2, \frac{5}{3}\right)$.

Como $m = f'(2) = -\frac{8}{9}$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y - \frac{5}{3} = -\frac{8}{9}(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal : } y - \frac{5}{3} = \frac{9}{8}(x - 2)$$

