

Problema 1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 6}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

1. (0,75 puntos). Estudiar su continuidad.
2. (1 punto). Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.
3. (1,25 puntos). Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

Solución:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 6}{x - 1} = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = -1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+}$ la función tiene en $x = 0$ un discontinuidad no evitable, hay un salto.

2. Cuando $x < 0$: No hay asíntotas verticales ni horizontales, pero hay oblicuas: $y = mx + n \Rightarrow y = 2x + 2$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 6}{x^2 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 6}{x - 1} - 2x \right) = 2$$

Cuando $x \geq 0$: No hay asíntotas verticales pero si horizontales y, por tanto, no hay oblicuas. $y = 1$

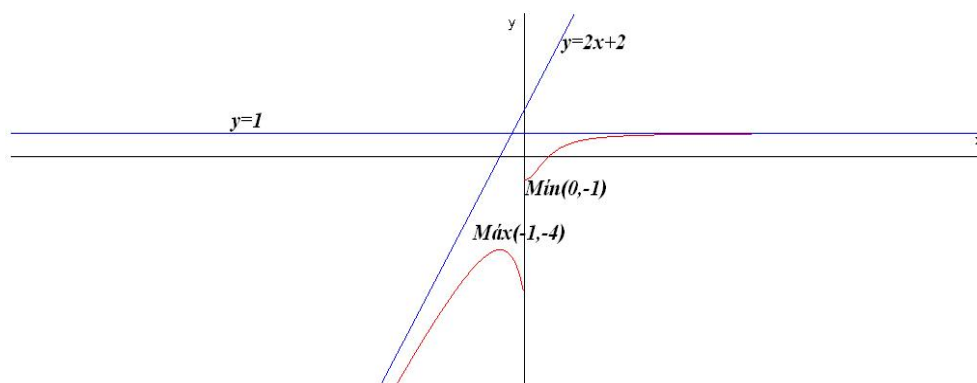
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

3.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cuando $x < 0$: $x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x = -1, x = 3$ No vale. En $x = -1$ la función pasa de crecer a decrecer, luego hay un máximo en el punto $(-1, -4)$

$x \geq 0$: $4x = 0 \implies x = 0$. En $x = 0$ la función empieza a crecer, luego hay un mínimo en el punto $(0, -1)$



Problema 2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

1. (0,75 puntos). Hallar las asíntotas de su gráfica.
2. (1,75 puntos). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.
3. (0,5 puntos). Esbozar la gráfica de la función.

Solución:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2} = \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)}$$

1. Asíntotas:

- Verticales: $x = -1$ y $x = 4$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{5(7x - 20)}{2(x + 1)(x - 4)} = \left[\frac{-135}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5(7x - 20)}{2(x + 1)(x - 4)} = \left[\frac{-135}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{5(7x - 20)}{2(x + 1)(x - 4)} = \left[\frac{40}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{5(7x - 20)}{2(x + 1)(x - 4)} = \left[\frac{40}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(7x - 20)}{2(x + 1)(x - 4)} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

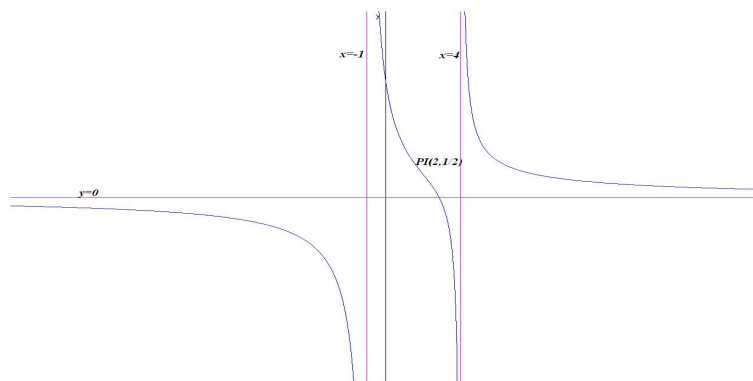
2. $f'(x) = -\frac{5(7x^2 - 40x + 88)}{2(x + 1)^2(x - 4)^2} < 0 \forall x \in R$. Luego f decrece en todo el dominio $R - \{-1, 4\}$.

$$f''(x) = -\frac{5(7x^3 - 60x^2 + 264x - 344)}{(x + 1)^3(x - 4)^3} = 0 \implies x = 2$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa	Cóncava

Hay un punto de inflexión en $(2, 5/2)$.

3. La gráfica es:



Problema 3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, se pide:

1. (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.
2. (1 punto). Calcular $\int_0^1 xf(x) dx$.

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0, \quad m = f'(0) = 1; \quad f(0) = 0 \implies y = x$$

2.

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf(x) dx &= \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = x - \arctan x \Big|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4 - \pi}{4} \end{aligned}$$

Problema 4 (2 puntos) Dada la función $f(x) = e^{1/x}$, se pide:

1. (1 punto). Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
2. (1 punto). Esbozar la gráfica $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \infty; \text{ luego en } 0 \text{ no existe el límite.}$$

2. Por el apartado anterior la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una asíntota horizontal en $y = 1$.

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Luego la función es siempre decreciente.

