Problema 1 *(3 puntos)*Represente gráficamente el recinto limitado por las parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = 2x^2$ y calcula su área.

(Extremadura Junio 2007)

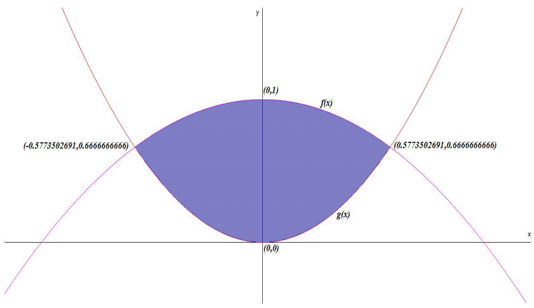
Solución:

Estudiamos las gráficas

- $$f(x) = 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -1$$
  $$f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$
  $$f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(0) = -6 < 0 \Longrightarrow (0, 1) \text{ Máximo}$$

- $g(x) = x^2$ parábola vertical con vértice en el punto $(0, 0)$ donde, claro está, hay un mínimo.

- Las dos funciones se cortan en los puntos donde $f(x) = g(x) \Longrightarrow 1 - x^2 = 2x^2 \Longrightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (1 - 3x^2)\, dx = x - x^3$$

$$S = \left| \left[x - x^3 \right]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \right| = \frac{4\sqrt{3}}{9}\, u^2$$

Problema 2 *(2 puntos)*Resolver los siguientes límites

1. $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + x} \right)$$

2.
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x+\sin x}{e^x-\cos x}$$

Solución:

1.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x}\right) = [\infty-\infty]$$
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x}\right)} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(x^2-1)-(x^2+x)}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x}\right)} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-1-x}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x}\right)} = -\frac{1}{2}$$

2.
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x+\sin x}{e^x-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1+\cos x}{e^x+\sin x} = 2$$

Problema 3 *(3 puntos)*Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si} \quad x<1 \\ bx^2-ax-1 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x=1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} ax^2+bx+1 = a+b+1 \\ \\ \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} bx^2-ax-1 = b-a-2 \end{array}\right. \Longrightarrow a=-1$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x=1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax+b & \text{si} \quad x<1 \\ \\ 2bx-a & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(1^-) = 2a+b \\ f'(1^+) = 2b-a \end{array}\right. \Longrightarrow 3a=b$$

3.
$$\left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2b \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=-3 \end{array}\right.$$

4. Tenemos:
$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} -x^2-3x+1 & \text{si} & x<1 \\ -3x^2+x-1 & \text{si} & x\ge 1 \end{array}\right.$$
$$f'(x)=\left\{\begin{array}{lll} -2x-3 & \text{si} & x<1 \\ -6x+1 & \text{si} & x\ge 1 \end{array}\right.$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0,2]$ y derivable en el $(0,2)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c\in(0,2)$ que cumple $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{-11-1}{2}=-6$.

Si cogemos la primera rama
$$f'(x)=-2x-3=-6\Longrightarrow x=3/2$$

Si cogemos la segunda rama
$$f'(x)=-6x+1=-6\Longrightarrow x=7/6$$

Los dos puntos son válidos.

Problema 4 *(2 puntos)*Hallar una función polinómica de tercer grado tal que tenga un extremo relativo en $(1,1)$ y un punto de inflexión en $(0,3)$ ¿Es $(1,1)$ el único extremo de la función? Determinar los máximos y mínimos relativos de f.

(Islas Canarias Junio 2007)

Solución:
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\quad f'(x)=3ax^2+2bx+c,\quad f'(x)=6ax+2b$$
$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=1\Longrightarrow a+b+c+d=1 \\ f(0)=3\Longrightarrow d=3 \\ f'(1)=0\Longrightarrow 3a+2b+c=0 \\ f''(0)=0\Longrightarrow 2b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=3 \end{array}\right.$$
$$f(x)=x^3-3x+3,\quad f'(x)=3x^2-3,\quad f''(x)=6x$$

$f'(x)=3x^2-3=0\Longrightarrow x=\pm1$,si utilizamos el criterio de la segunda derivada:
$$\left\{\begin{array}{l} f''(1)=6>0\Longrightarrow (1,1)\ \text{Mínimo} \\ f''(-1)=-6<0\Longrightarrow (-1,5)\ \text{Máximo} \end{array}\right.$$

Para los puntos de inflexión $f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$, para ver si se trata de un punto de inflexión recurrimos a la tercera derivada $f'''(x) = 6 \Longrightarrow f'''(0) = 6 \neq 0$, por lo que el punto $(0, 3)$ es de Inflexión.

Problema 5 *(2 puntos)*Calcular la siguientes integrales

1. (Castilla-La Mancha junio-2007)

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\, dx$$

2. (Extremadura junio-2007)

$$\int_3^{10} (x-2)^{1/3}\, dx$$

Solución:

1. $t = \sqrt{x} \Longrightarrow t^2 = x \Longrightarrow dx = 2tdt$

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\, dx = 4\int \frac{t}{1+t}\, dt = 4\int \frac{t}{1+t}\, dt = 4\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt =$$

$$= 4\left[t - \ln(1+t)\right] = 4\left[\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\right] + C$$

2.

$$\int_3^{10} (x-2)^{1/3}\, dx = \left.\frac{(x-2)^{4/3}}{4/3}\right]_3^{10} = \frac{45}{4}$$