Problema 1 Dada la función:

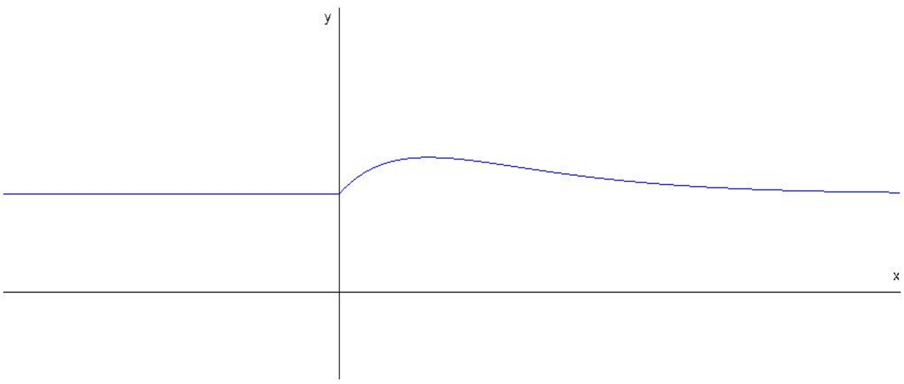
$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} a & \text{si} & x < 0 \\ 1 + xe^{-x} & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$ y estudiar, en este caso, la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) Calcular, en función de a la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Solución:



a) Continuidad en $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} a = a$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (1 + xe^{-x}) = 1$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 0$ cuando $a = 1$.

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x < 0 \\ e^{-x} - xe^{-x} & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = 0$: $f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = 1$ luego no es derivable en $x = 0$.
En resumen, para $a = 1$ la función es continua en R y derivable en $R - \{0\}$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} a\,dx + \int_{0}^{1} (1+xe^{-x})\,dx = ax]_{-1}^{0} + x - e^{-x}(x+1)]_0^1 =$
$-a + 2(1 - e^{-1})$

Problema 2 Dada la función $f(x) = e^{-x} - x$

a) Determinar el polinomio de segundo grado, $P(x) = ax^2 + bx + c$, que verifica simultáneamente las tres condiciones siguientes: $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.

b) Usar los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

Solución:

a) $f(x) = e^{-x} - x,\ \ f'(x) = -e^{-x} - 1,\ \ f'(x) = e^{-x}$
$P(x) = ax^2 + bx + c\ \ P'(x) = 2ax + b,\ \ f'(x) = 2a$

$$\left\{\begin{array}{l} P(0) = f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \\ P'(0) = f'(0) = -2 \Longrightarrow b = -2 \\ P''(0) = f''(0) = 1 \Longrightarrow 2a = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

b)
- La función es derivable en R y se cumple: $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0\ \forall x \in R \Longrightarrow$ la función es decreciente en R.
- La función es continua en R y además:

  $$\lim_{x\longrightarrow -\infty}(e^{-x} - x) = +\infty, \text{ y } \lim_{x\longrightarrow \infty}(e^{-x} - x) = -\infty$$

  Por el teorema de Bolzano $\exists c \in R / f(c) = 0$
- Por las conclusiones anteriores se concluye que ese punto c es único.

Problema 3 Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, se pide:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Justificar que f está definida en todo x del intervalo $[0, 1]$ y calcular $\displaystyle\int_0^1 (x-2)f(x)\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ y $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

b) $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

$$\int_0^1 (x-2)f(x)\,dx = \int_0^1 (x-2)\sqrt{x^2-4x+3}\,dx = \left.\frac{\sqrt{(x^2-4x+3)^3}}{3}\right]_0^1 = -\sqrt{3}$$

Problema 4 Calcular

a) $\displaystyle\int_1^{3/2} \frac{dx}{1-4x^2}$

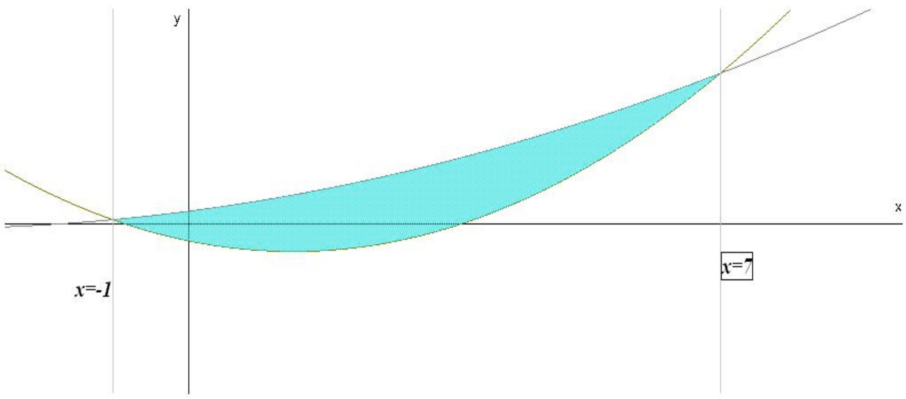
b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

Solución:

a) $\displaystyle\int_1^{3/2} \frac{dx}{1-4x^2} = \left.\frac{\ln|2x+1|}{4} - \frac{\ln|2x-1|}{4}\right]_1^{3/2} = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right) = -0,1$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = -\frac{1}{2}$

Problema 5 Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = 4x^2 - 11x - 12$ y $g(x) = x^2 + 7x + 9$.
Solución:



$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 4x^2 - 11x - 12 = x^2 + 7x + 9x \Longrightarrow x = -1,\;\; x = 7$$

Tendremos que calcular S_1 con los límites de integración entre -1 y 7.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (3x^2 - 18x - 21)\,dx = x^3 - 9x^2 - 21x$$

$$S_1 = \int_{-1}^{7} (f(x) - g(x))\,dx = F(7) - F(-1) = -256$$

$$S = |S_1| = 256\ u^2$$