

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Estudiar su curvatura y sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 2$.
- j) Calcular el área encerrada por la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Solución:

a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 + 3 = 0 \implies$ No tiene solución y, por tanto, no hay.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -3 \implies (0, -3)$.

c)

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
signo	$-$	$+$

d) $f(-x) \neq -f(x) \implies$ no hay simetría.

e) Asíntotas:

■ **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

■ **Horizontales:** No hay.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \infty$$

■ **Oblicuas:** $y = mx + m$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x - 1} - x \right) = 1$$

$$y = x + 1$$

f)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = 0 \implies x = -1, x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

La función es decreciente en: $(-1, 1) \cup (1, 3)$

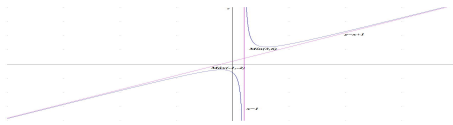
La función tiene un máximo en: $(-1, -2)$ y un mínimo en $(3, 6)$.

g)

$$f''(x) = \frac{8}{(x - 1)^3} \neq 0 \implies \text{no hay puntos de inflexión}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava

La función f es convexa en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava en el intervalo $(1, \infty)$.



h) Representación:

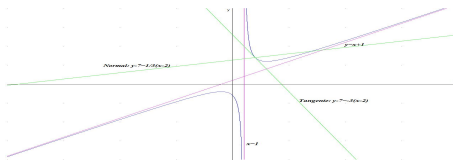
i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$:

Como $f(2) = 7$ las rectas pasan por el punto $(2, 7)$.

Como $m = f'(2) = -3$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y - 7 = -3(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal : } y - 7 = \frac{1}{3}(x - 2)$$



j) La función no corta al eje OX , luego el intervalo de integración es el $[2, 3]$.

$$\int_2^3 x^2 + 3x - 1 \, dx = \left. \frac{x^2}{2} + x + 4 \ln |x - 1| \right|_2^3 = \frac{7}{2} + 4 \ln 2 = 6,27 \, u^2$$

