

Problema 1 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - bx + 2 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + 2bx - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b , hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3ax^2 - bx + 2) = 3a - b + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + 2bx - 1) = a + 2b - 1 \end{cases} \implies 2a - 3b = -3$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b , hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 6ax - b & \text{si } x < 1 \\ 2ax + 2b & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f'(1^-) = 6a - b \\ f'(1^+) = 2a + 2b \end{cases} &\implies 4a - 3b = 0 \end{aligned}$$

- 3.

$$\begin{cases} 2a - 3b = -3 \\ 4a - 3b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3/2 \\ b = 2 \end{cases}$$

4. Tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 9/2x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3/2x^2 + 4x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ f'(x) &= \begin{cases} 9x - 2 & \text{si } x < 1 \\ 3x + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El

Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ que cumple

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{11}{2}.$$

Si cogemos la primera rama $c < 1$:

$$f'(c) = 9c - 2 = 11/2 \implies c = 5/6 \text{ si vale}$$

Si cogemos la segunda rama $c \geq 1$:

$$f'(c) = 3c + 4 = 11/2 \implies c = 1/2 \text{ no vale}$$

El punto $c \in (0, 2)$ al que hace referencia el teorema es $c = 7/12$.

Problema 2 Hallar una función polinómica de tercer grado tal que pasa por el punto $(0, 2)$, tenga un extremo relativo en el punto $(1, 5)$ y un punto de inflexión en $x = 2$. Decidir si el extremo es un máximo o un mínimo.

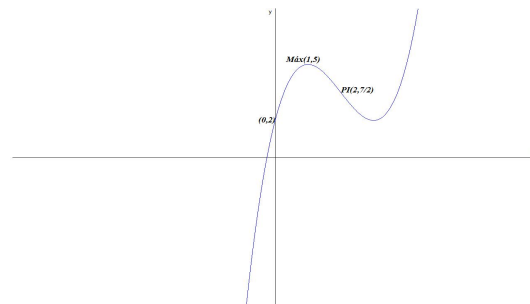
Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \implies d = 2 \\ f(1) = 5 \implies a + b + c + d = 5 \\ f'(1) = 0 \implies 3a + 2b + c = 0 \\ f''(2) = 0 \implies 12a + 2b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3/4 \\ b = -9/2 \\ c = 27/4 \\ d = 2 \end{cases}$$

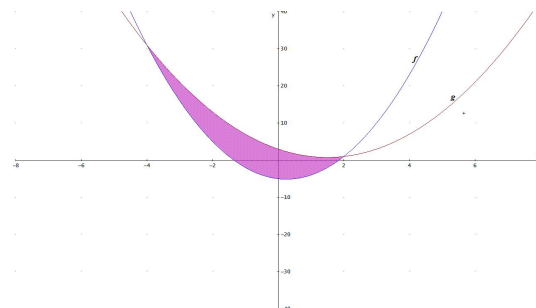
$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{4}x + 2 \implies f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 9x + \frac{27}{4} \implies f''(x) = \frac{9}{2}x - 9$$

$$f''(1) = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2} < 0 \implies \text{el extremo en el punto } (1, 5) \text{ es un máximo.}$$



Problema 3 Se pide:

1. Hallar el área encerrada por las funciones $f(x) = 2x^2 - x - 5$ y $g(x) = x^2 - 3x + 3$.
2. Calcular el volumen de revolución formado por la gráfica de la función g al girar sobre el eje OX en el intervalo $[0, 1]$.



Solución:

1. La área sería:

$$f(x) = g(x) \implies 2x^2 - x - 5 = x^2 - 3x + 3 \implies x = -4, \quad x = 2$$

$$H(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (x^2 + 2x - 8) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 8x$$

$$S_1 = \int_{-4}^2 (f(x) - g(x)) dx = H(2) - H(-4) = -36$$

$$S = |S_1| = 36$$

- 2.

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - 3x + 3)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 9) dx =$$

$$\left. \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 5x^3 - 9x^2 + 9x \right|_0^1 = \frac{37\pi}{10}$$

Problema 4 Dada la función $f(x) = |x^2 + 2x - 8|$ se pide:

1. Representación gráfica de forma aproximada y su forma como una función definida por ramas
2. Estudiar su continuidad y derivabilidad a la vista del estudio anterior.

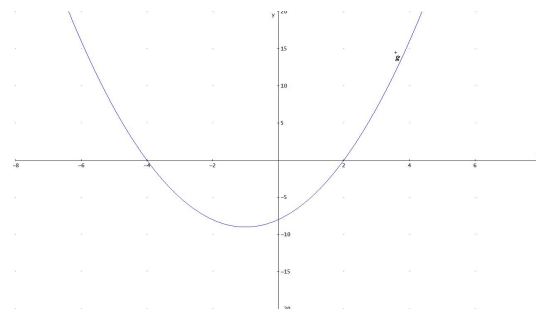
Solución:

1. Llamamos $g(x) = x^2 + 2x - 8$ y la representamos gráficamente. La función $f(x) = |x^2 + 2x - 8|$ no puede tener recorrido por debajo del eje de abscisas. Esta función sería:

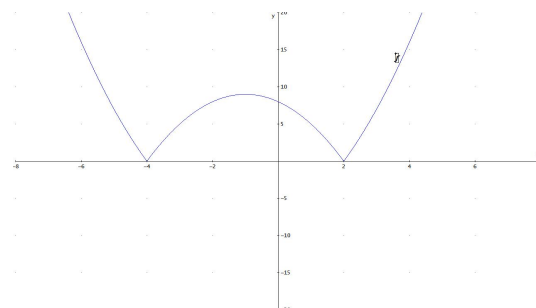
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 2x + 8 & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ x^2 + 2x - 8 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2. Claramente y a la vista de la gráfica la función es continua en todo $\mathbb{R}$ pero no sería derivable en los puntos $x = -4$ y $x = 2$ donde presenta picos. En esos picos podríamos trazar infinitas tangentes a la gráfica de f .

La gráfica de la función g :



La gráfica de la función f :



Problema 5 Estudiar la derivabilidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} -2e^x - x & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+2}{x-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

y dibuja una representación gráfica aproximada.

Solución:

Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-2e^x - x) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x-1} = -2 \\ f(0) = -2 \end{array} \right. \implies f \text{ continua en } x = 0$$

En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es siempre continua. Luego la función es continua en R .

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2e^x - 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{-3}{(x-1)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = -3 \neq f'(0^+) = -3 \implies f \text{ es derivable en } x = 0.$$

En conclusión f es continua y derivable en $R - \{1\}$ (Hay una asíntota en la rama $x \geq 0$ en $x = 1$)

