

Problema 1 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^4 - 5x^2 - 4x + 2}{4x^5 - 5x + 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{8x + 11}}{x - 9}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 + 7x + 5})$
4. Calcular n sabiendo que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 6} \right)^{3nx} = 5$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1 + \sin x)}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan x + e^x - 1}{e^x + x - 1}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^4 - 5x^2 - 4x + 2}{4x^5 - 5x + 1} = \frac{14}{15}$
2. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{8x + 11}}{x - 9} = \frac{5\sqrt{83}}{83}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 + 7x + 5}) = -\frac{7\sqrt{2}}{4}$
4. Calcular n sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 6} \right)^{3nx} = 5 \implies n = -\frac{\ln 5}{3}$$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1 + \sin x)} = 0$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan x + e^x - 1}{e^x + x - 1} = \frac{1}{2}$

Problema 2 Calcular las rectas tangente y normal en los siguientes casos:

1. a la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 5}$ en el punto de abscisa $x = 3$.

2. a la función $f(x) = 3x^2e^{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.
3. En este caso sólo la recta o rectas tangentes la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 5}$ sabiendo que ésta o éstas son paralelas a la recta $y = -3x - 11$.

Solución:

$$1. f(3) = \frac{11}{8}, f'(x) = \frac{x^2 + 10x + 6}{(x + 5)^2} \implies m = f'(3) = \frac{45}{64}:$$

$$\text{Recta tangente : } y - \frac{11}{8} = \frac{45}{64}(x - 3)$$

$$\text{Recta normal : } y - \frac{11}{8} = -\frac{64}{45}(x - 3)$$

$$2. f(1) = 3, f'(x) = 3xe^{x-1}(x + 2) \implies m = f'(1) = 9:$$

$$\text{Recta tangente : } y - 3 = 9(x - 1)$$

$$\text{Recta normal : } y - 3 = -\frac{1}{9}(x - 1)$$

$$3. m = f'(a) = -3:$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 10x + 1}{(x + 5)^2} \implies m = f'(a) = \frac{a^2 + 10a + 1}{(a + 5)^2} = -3 \implies$$

$$\begin{cases} a = -2,55 \implies b = f(-2,55) = 2,25 \implies y - 2,25 = -3(x + 2,55) \\ a = -7,5 \implies b = f(-7,5) = -22,25 \implies y + 22,25 = -3(x + 7,5) \end{cases}$$

Problema 3 Calcular las siguientes integrales

1. Sabiendo que $f'(x) = 9x^2 - 5e^x$ encontrar la función primitiva que pasa por el punto $(0, 5)$
2. $\int \left(x^2 - \frac{5}{1 + x^2} + 7 \cos x \right) dx$
3. $\int \left(\frac{7x^3 - 5\sqrt[5]{x^2} + 3x}{x^2} \right) dx$

Solución:

$$1. f(x) = 3x^3 - 5e^x + C \text{ como } f(0) = 5 \implies -5 + C = 5 \implies C = 10 \\ \text{luego } f(x) = 3x^3 - 5e^x + 10.$$

$$2. \int \left(x^2 - \frac{5}{1 + x^2} + 7 \cos x \right) dx = \frac{x^3}{3} - 5 \arctan x + 7 \sin x + C$$

$$3. \int \left(\frac{7x^3 - 5\sqrt[5]{x^2} + 3x}{x^2} \right) dx = \frac{7x^2}{2} + \frac{25x^{-3/5}}{3} + 3 \ln |x| + C$$