

Problema 1 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 4ax^2 - bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + 2bx - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b , hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4ax^2 - bx + 1) = 4a - b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + 2bx - 2) = a + 2b - 2 \end{cases} \implies a - b = -1$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b , hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 8ax - b & \text{si } x < 1 \\ 2ax + 2b & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f'(1^-) = 8a - b \\ f'(1^+) = 2a + 2b \end{cases} &\implies 2a - b = 0 \end{aligned}$$

- 3.

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

4. Tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 4x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ f'(x) &= \begin{cases} 8x - 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ que cumple

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{9}{2}.$$

Si cogemos la primera rama $c < 1$:

$$f'(c) = 8c - 2 = 9/2 \implies c = 13/16 \text{ si vale}$$

Si cogemos la segunda rama $c \geq 1$:

$$f'(c) = 2c + 4 = 9/2 \implies c = 1/4 \text{ no vale}$$

El punto $c \in (0, 2)$ al que hace referencia el teorema es $c = 13/16$.

Problema 2 Hallar una función polinómica de tercer grado tal que pasa por el punto $(0, 3)$, tenga un extremo relativo en $x = -1$ y un punto de inflexión en $(1, 2)$

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

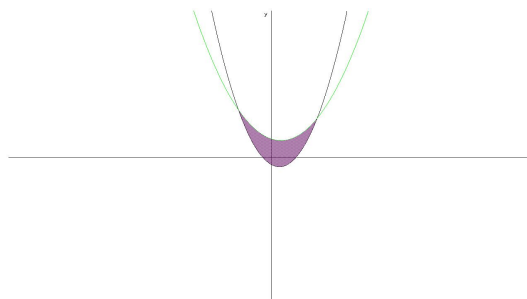
$$\begin{cases} f(0) = 3 \implies d = 3 \\ f(1) = 2 \implies a + b + c + d = 2 \\ f'(-1) = 0 \implies 3a - 2b + c = 0 \\ f''(1) = 0 \implies 6a + 2b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1/11 \\ b = -3/11 \\ c = -9/11 \\ d = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{11}x^3 - \frac{3}{11}x^2 - \frac{9}{11}x + 3,$$

$f''(-1) = -6a + 2b = -\frac{6}{11} - \frac{6}{11} = -\frac{12}{11} < 0 \implies$ el extremo en el punto donde $x = -1$ es un máximo.

Problema 3 Hallar el área encerrada por las funciones $f(x) = 2x^2 - 5x - 10$ y $g(x) = x^2 - 3x + 25$.

Solución:



$$f(x) = g(x) \implies 2x^2 - 5x - 10 = x^2 - 3x + 25 \implies x = -5, \quad x = 7$$

$$H(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (x^2 - 2x - 35) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 35x$$

$$S = \int_{-5}^7 (f(x) - g(x)) dx = H(7) - H(-5) = -288$$

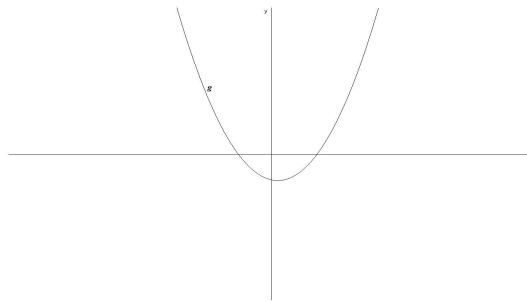
$$S = |S| = 288 u^2$$

Problema 4 Dada la función $f(x) = |x^2 - 2x - 35|$ se pide:

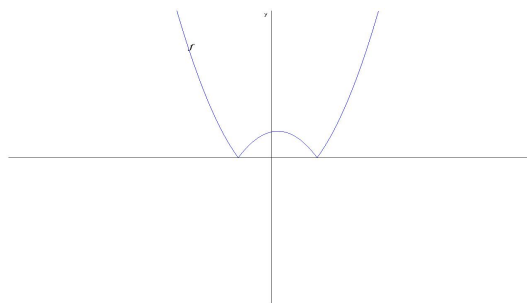
1. Representación gráfica de forma aproximada y su forma como una función definida por ramas
2. Estudiar su continuidad y derivabilidad a la vista del estudio anterior.

Solución:

1. Llamamos $g(x) = x^2 - 2x - 35$ y la representamos gráficamente:



La función $f(x) = |x^2 - 2x - 35|$ no puede tener recorrido por debajo del eje de abscisas. Esta función sería:



Luego:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 35 & \text{si } x < -5 \\ -x^2 + 2x + 35 & \text{si } -5 \leq x < 7 \\ x^2 - 2x - 35 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

2. Claramente y a la vista de la gráfica la función es continua en todo $\mathbb{R}$ pero no sería derivable en los puntos $x = -5$ y $x = 7$ donde presenta picos. En esos picos podríamos trazar infinitas tangentes a la gráfica de f .