Problema 1 Sea $f : R \longrightarrow R$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

1. Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión de abcisa $x = \dfrac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abcisa $x = 0$ tenga por ecuación $y = 5 - 6x$.
2. Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$, calcula los extremos relativos de f (abcisas donde se obtienen y valores que alcanzan)

(Andalucía junio-2014) **Solución:**

1. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,\;\; f'(x) = 3x^2 + 2ax + b,\;\; f''(x) = 6x + 2a$
   La pendiente de la recta $m = f'(0) = -6$ y como el punto de tangencia es común a la gráfica de f y a la recta tangente $f(0) = 5 - 0 = 5$:

$$\left\{\begin{array}{l} f''(1/2) = 0 \Longrightarrow 3 + 2a = 0 \Longrightarrow a = -3/2 \\ f'(0) = -6 \Longrightarrow b = -6 \\ f(0) = 5 \Longrightarrow c = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow P(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 6x + 5$$

2.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8,\;\; f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 0 \Longrightarrow x = 1,\;\; x = -3$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función f es creciente en $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $(-3, 1)$. Presenta un máximo relativo en el punto $(-3, 35)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, 3)$.

Problema 2 Sea f la función definida por $f(x) = x \ln(x + 1)$ para $x > -1$ (ln denota logaritmo neperiano). Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 0)$. (Andalucía junio-2014)

Solución:

$$F(x) = \int x \ln(x + 1)\, dx = \frac{x^2 \ln|x + 1|}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln|x + 1|}{2} + C =$$

$$\frac{2(x^2 - 1)\ln|x + 1| + x(2 - x)}{4} + C$$

$$F(1) = 0 \Longrightarrow C = -\frac{1}{4}$$

$$F(x) = \frac{2(x^2-1)\ln|x+1| + x(2-x)}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2(x^2-1)\ln|x+1| + x(2-x) - 1}{4}$$

Problema 3 Calcular

1. Determine, si existen, los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función $g(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^2+2x+2} - \sqrt{3x^2+x} \right)$

(Aragón junio-2014)
Solución:

1. $$g'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

La función decrece en el $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, crece en $(0, \infty)$ y presenta un mínimo en el punto $(0, 1)$.

$$g''(x) = \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{no hay puntos de inflexión}$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^2+2x+2} - \sqrt{3x^2+x} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

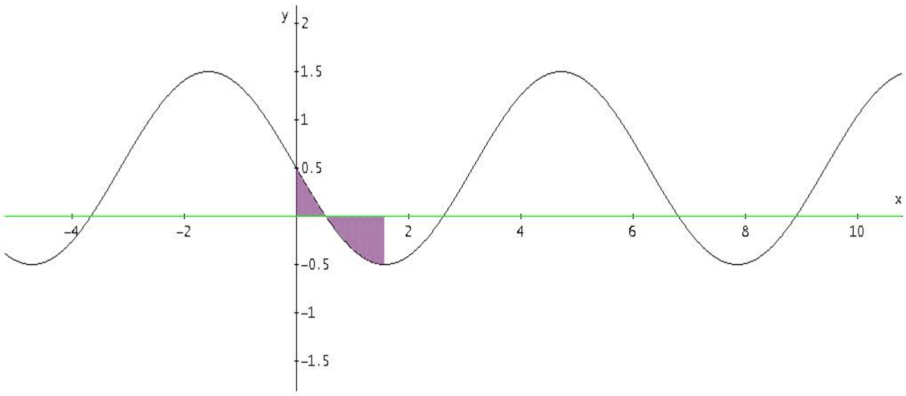
Problema 4 Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{2} - \sin x$

1. Dibuje el recinto acotado comprendido entre la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Calcular el área del recinto anterior.

(Asturias junio-2014)
Solución:

1. Dibujamos la función:



- Puntos de corte: Con el eje OY el punto $(0,1/2)$ y con el eje OX los puntos $(\pi/6,0)$ y $5\pi/6,0)$ en el intervalo $[0,2\pi]$:

$$\frac{1}{2}-\sin x=0\Longrightarrow x=\frac{\pi}{6},\ \ x=\frac{5\pi}{6}$$

- Máximos, mínimos y puntos de inflexión: $f'(x)=-\cos x=0\Longrightarrow$ $x=\frac{\pi}{2},\ \ x=\frac{3\pi}{2}$
$f''(x)=\sin x=0\Longrightarrow x=\pi,\ \ x=0$ puntos de inflexión.
$f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1>0\Longrightarrow\left(\frac{\pi}{2},-\frac{1}{2}\right)$ es un mínimo.
$f''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1<0\Longrightarrow\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3}{2}\right)$ es un máximo.

2. Tendremos que calcular las áreas S_1 con los límites de integración entre 0 y $\pi/6$ y S_2 con los límites de integración entre $\pi/6$ y $\pi/2$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)\,dx=\frac{x}{2}+\cos x$$

$$S_1=\int_0^{\pi/6}f(x)\,dx=F(\pi/6)-F(0)=\frac{\pi+6\sqrt{3}-12}{12}$$

$$S_2=\int_{\pi/6}^{\pi/2}f(x)\,dx=F(\pi/2)-F(\pi/6)=\frac{2\pi+6\sqrt{3}}{12}$$

$$S=|S_1|+|S_2|=\frac{12(\sqrt{3}-1)-\pi}{12}\ u^2$$

Problema 5 Considera la función:

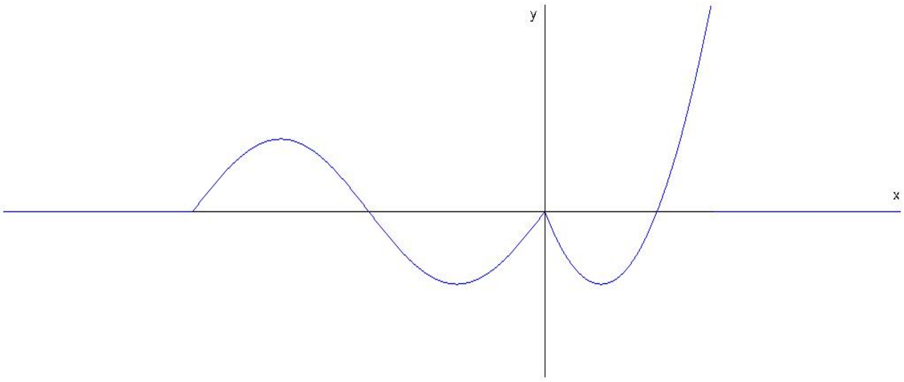
$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc}\sin x & \text{si} & x\in[-2\pi,0)\\ x^2-2x & \text{si} & x\in[0,3]\end{array}\right.$$

Se pide:

1. Estudia si la función es derivable en $x = 0$.
2. Calcula los punto de corte con los ejes. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f. Dibuja su gráfica.
3. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f, el eje de abcisas ($y = 0$) y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 3$.

(Cantabria junio-2014)

Solución:



1. Continuidad en $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (x^2 - 2x) = 0$$

$$f(0) = 0$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 0$..

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x \in [-2\pi, 0) \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x \in [0, 3] \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 0$: $f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -2$ luego no es derivable en $x = 0$.

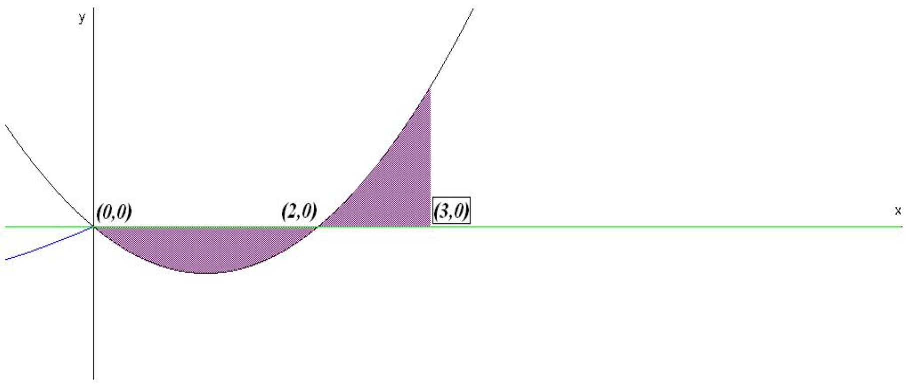
2.
   - Puntos de Corte: $(-\pi, 0)$, $(-2\pi, 0)$, $(0, 0)$ y $(2, 0)$

- Monotonía: En $[-2\pi, 0)$ tenemos $f'(x) = \cos x = 0 \Longrightarrow x = -\pi/2,\ x = -3\pi/2$.
  En $[0, 3]$: $2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(-2\pi, -3\pi/2)$	$(-3\pi/2, -\pi/2)$	$(-\pi/2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente	decreciente	creciente

  Tiene un máximo en el punto $(-3\pi/2, 1)$ y mínimos en los puntos $(-\pi/2, -1)$ y $(1, -1)$.
  Tiene el punto de inflexión $(-\pi, 0)$

3. Tendremos que calcular las áreas S_1 con los límites de integración entre 0 y $\pi/6$ y S_2 con los límites de integración entre $\pi/6$ y $\pi/2$



$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x^2 - 2x\right)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2$$

$$S_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = \frac{4}{3}$$

$$S_2 = \int_2^3 f(x)\,dx = F(3) - F(2) = -\frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{8}{3}\ u^2$$