

1. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < 0 \\ 2x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2. Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{si } x \leq 1 \\ x-1, & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3}, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

3. Estudia la continuidad de la función: $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-5x+4}$.

4. Dada la función $f(x) = |x-1| + x$:

- Escribela como una función definida a trozos.
- Estudia su continuidad.
- Representala gráficamente.

5. Determina el valor de los coeficientes a y b para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

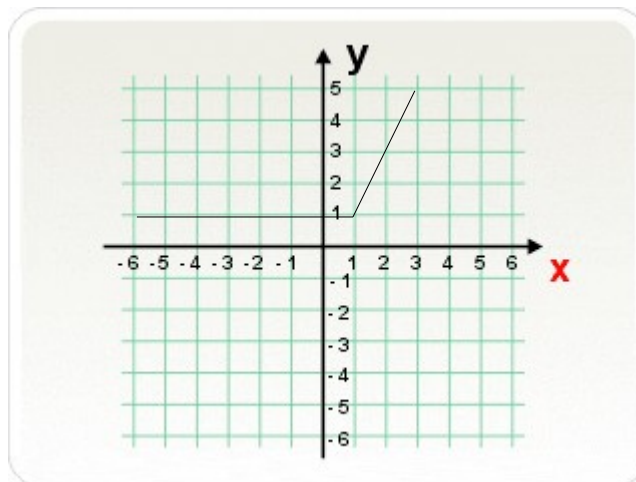
$$f(x) = \begin{cases} \cos(x-1), & \text{si } x < 1 \\ ax+b, & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- Enuncie el Teorema de Bolzano.
 - Demuestre que alguna de las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 8x - 1$ es negativa.
 - Demuestre que $P(x)$ tiene también alguna raíz real positiva.
- Enuncie el Teorema de Bolzano.
 - Aplique el Teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ tiene soluciones positivas.
 - ¿Tiene la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ alguna solución negativa? Razona la respuesta.
- Enuncie el Teorema de Bolzano.
 - Utilizando el teorema de Bolzano, encuentre un intervalo de la recta real en el que la función polinómica $p(x) = 3x^3 - x + 1$ tenga alguna raíz real.
 - Utilizando el Teorema de Bolzano, demuestre que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x + \ln(1+x^2)$ y $g(x) = e^x + 1$ se cortan en algún punto.
- Demuestra que la función $f(x) = -2x^3 + 3x - 8$ corta al eje de abscisas en el intervalo $[-2, 2]$. ¿Se podría decir lo mismo de la función $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 5}{x-1}$?

10. Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -3x + 11, & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$ verifica las condiciones del Teorema de Weierstrass. Encuentra cuáles son los puntos máximos y mínimos absolutos de los que habla el Teorema (puedes hallarlos representando la función en el intervalo de definición).

SOLUCIONES:

1. En $x=0$ hay una discontinuidad no evitable, de primera especie, de salto finito. En el resto de valores, la función es continua.
2. En $x=3$ hay una discontinuidad no evitable, de primera especie, de salto infinito. En el resto de valores, la función es continua.
3. En $x=1$ hay una discontinuidad evitable.
En $x=4$ hay una discontinuidad no evitable, de primera especie, de salto infinito.
En el resto de valores, la función es continua.
4. a) $f(x) = |x-1| + x = \begin{cases} -x+1+x, & \text{si } x < 1 \\ x-1+x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1 \\ 2x-1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
b) La función es continua en todo $\mathbb{R}$.
c)



5. $a=4$; $b=-3$.
6. a) Teoría.
b) Aplicar el Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,0]$.
c) Aplicar el Teorema de Bolzano en el intervalo $[0,3]$.
7. a) Teoría.
b) Tomar la función auxiliar $f(x) = \cos x - x^2 + 1$, y aplicar el Teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 2\pi]$.
c) Igual pero con el intervalo $[-2\pi, 0]$.
8. a) Teoría.
b) Aplicar el Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,0]$.
c) Tomar la función auxiliar: $h(x) = f(x) - g(x) = \ln(x^2 + 1) - 1$, y aplicar el Teorema de

Bolzano en el intervalo $[0,2]$.

9. La primera función corta al eje de abscisas, pues verifica el Teorema de Bolzano en el intervalo $[-2,2]$.

De la segunda función no podemos decir lo mismo, ya que no es continua en $x=-1$, y por tanto, no verifica las condiciones del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-2,2]$.

10. La función sí verifica las condiciones del Teorema de Weierstrass (continuidad en el intervalo $[-1,4]$).

El máximo absoluto es el punto $(2,5)$.

El mínimo absoluto es el punto $(4,-1)$.