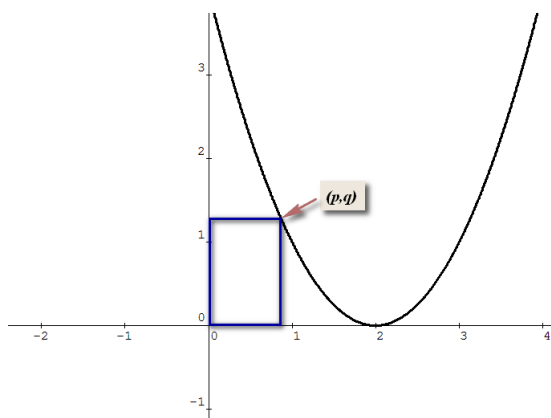


Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la parábola $y = x^2 - 4x + 4$ y un punto (p, q) sobre ella con $0 \leq p \leq 2$. Formamos un rectángulo de lados paralelos a los ejes con vértices opuestos $(0, 0)$ y (p, q) . Calcula (p, q) para que el área de ese rectángulo sea máxima.

Solución:



El punto (p, q) está en la parábola $y = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow q = p^2 - 4p + 4$

El área del rectángulo será $A = p \cdot q$, donde $p \in [0, 2]$ es variable y q depende de p . Entonces tenemos que el área del rectángulo es una función de $p \Rightarrow A(p) = p \cdot (p^2 - 4p + 4) \Rightarrow A(p) = p^3 - 4p^2 + 4p$

Queremos encontrar el máximo de esta función área, para ello derivamos e igualamos a cero.

$$A'(p) = 3p^2 - 8p + 4; \quad A'(p) = 0 \Rightarrow 3p^2 - 8p + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ p = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Comprobemos que el área máxima se alcanza para $p = \frac{2}{3}$; $A''(p) = 6p - 8 \Rightarrow A''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 8 = -4 < 0$

Si $p = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + 4 = \frac{16}{9}$ y el punto $(p, q) = \left(\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right)$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula los límites siguientes:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctg x - x}{2x - \arcsen x} \qquad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sen x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \qquad c) \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x \cdot \tg x]$$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctg x - x}{2x - \arcsen x} \left(\text{indeterminación } \frac{0}{0}, \text{ aplicamos la regla de L'Hôpital que denotaremos por } \triangleq \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{arctg} x - x}{2x - \operatorname{arcsen} x} \triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{1+x^2} - 1}{2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{1+0} - 1}{2 - \frac{1}{\sqrt{1-0}}} = 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \Rightarrow (\text{indeterminación } 1^\infty) \Rightarrow \text{Llamamos } A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}, \text{ entonces}$

$$\begin{aligned} \ln A &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \ln \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)}{x^2} \left(\frac{0}{0} \right) \triangleq \\ &\triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x)}{x^2 \cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{2x^2 \cdot \operatorname{sen} x} \left(\frac{0}{0} \right) \triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x}{4x \cdot \operatorname{sen} x + 2x^2 \cdot \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \cdot \operatorname{sen} x}{4x \cdot \operatorname{sen} x + 2x^2 \cdot \cos x} \left(\frac{0}{0} \right) \triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x - x \cdot \cos x}{4 \cdot \operatorname{sen} x + 4x \cdot \cos x + 4x \cdot \cos x - 2x^2 \cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x - x \cdot \cos x}{8x \cdot \cos x + (4 - 2x^2) \cdot \operatorname{sen} x} \\ &\left(\frac{0}{0} \right) \triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x - \cos x + x \cdot \operatorname{sen} x}{8 \cdot \cos x - 8x \cdot \operatorname{sen} x - 4x \cdot \operatorname{sen} x + (4 - 2x^2) \cdot \cos x} = \frac{-1 - 1 + 0}{8 - 0 - 0 + 4} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \ln A = -\frac{1}{6} \Rightarrow A = e^{-\frac{1}{6}} \Rightarrow \end{aligned}$$

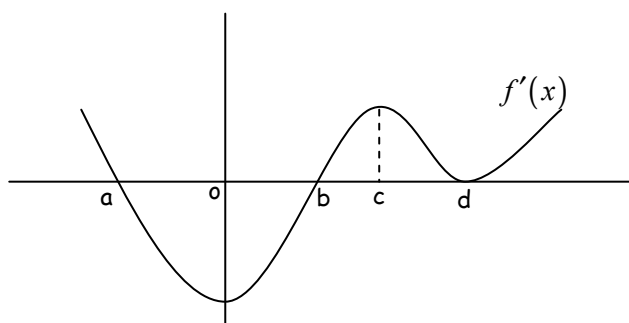
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x \cdot \operatorname{tg} x]$ (indeterminación $-\infty \cdot 0$) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x \cdot \operatorname{tg} x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \triangleq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x} \left(\frac{0}{0} \right) \triangleq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea $f(x)$ una función tal que la gráfica de su derivada tiene la forma siguiente. Analiza las características de la función $f(x)$.



Solución:

- $f(x)$ es una función continua y derivable.
- $f(x)$ es creciente en $(-\infty, a) \cup (b, d) \cup (d, +\infty)$ puesto que en estos intervalos $f'(x) > 0$.
- $f(x)$ es decreciente en (a, b) puesto que en este intervalo $f'(x) < 0$.
- En el punto $x = a$, $f(x)$ presenta un máximo local, ya que $f'(a) = 0$, $f(x)$ crece para $x < a$ y $f(x)$ decrece para $x > a$. También podemos ver que $f''(a) < 0$ puesto que la recta tangente a $f'(x)$ en $x = a$ tiene pendiente negativa.
- En el punto $x = b$, $f(x)$ presenta un mínimo local, ya que $f'(b) = 0$, $f(x)$ decrece para $x < b$ y $f(x)$ crece para $x > b$. También podemos ver que $f''(b) > 0$ puesto que la recta tangente a $f'(x)$ en $x = b$ tiene pendiente positiva.
- En el punto $x = 0$, $f(x)$ presenta un punto de inflexión ya que $f''(0) = 0$ puesto que la recta tangente a $f'(x)$ en $x = 0$ es horizontal (tiene pendiente cero), con cambio de curvatura de $\cap$ a $\cup$. 
- En el punto $x = c$, $f(x)$ presenta un punto de inflexión ya que $f''(c) = 0$ puesto que la recta tangente a $f'(x)$ en $x = c$ es horizontal (tiene pendiente cero), con cambio de curvatura de $\cup$ a $\cap$. 
- En el punto $x = d$, $f(x)$ presenta un punto de inflexión (de silla) ya que $f'(d) = 0$ y $f''(d) = 0$ puesto que la recta tangente a $f'(x)$ en $x = d$ es horizontal y, el cambio de curvatura será de $\cap$ a $\cup$ al ser $f(x)$ creciente antes y después de ese punto. 
- La curvatura de $f(x)$ es $\cup$ en los intervalos $(0, c) \cup (d, +\infty)$, puesto que $f''(x) > 0$ en esos intervalos.
- La curvatura de $f(x)$ es $\cap$ en los intervalos $(-\infty, 0) \cup (c, d)$, puesto que $f''(x) < 0$ en esos intervalos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función $f(x) = e^x + a \cdot e^{-x}$, siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a :

- (2 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.
- (1 punto) Estudiar para qué valor, o valores, de a la función $f(x)$ tiene alguna asíntota horizontal.

Solución:

$$f(x) = e^x + a \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^x - a \cdot e^{-x}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - a \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x - \frac{a}{e^x} = 0 \Rightarrow e^{2x} - a = 0 \Rightarrow$$

$$e^{2x} = a \Rightarrow \ln(e^{2x}) = \ln a \Rightarrow 2x = \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln a}{2} \quad (\text{existe para } a > 0)$$

Si $x = \frac{\ln a}{2}$, $f(x)$ puede tener un máximo o un mínimo local; nos apoyamos en la segunda derivada de $f(x)$ para determinarlo.

$$f''(x) = e^x + a \cdot e^{-x} \Rightarrow f''\left(\frac{\ln a}{2}\right) = e^{\frac{\ln a}{2}} + a \cdot e^{-\frac{\ln a}{2}} > 0, \forall a > 0 \Rightarrow f(x) \text{ presenta un mínimo en } x = \frac{\ln a}{2}$$

$$\text{Si } x = \frac{\ln a}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\ln a}{2}\right) = e^{\frac{\ln a}{2}} + a \cdot e^{-\frac{\ln a}{2}} = \sqrt{e^{\ln a}} + \frac{a}{\sqrt{e^{\ln a}}} = \sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{2a}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{a}$$

Por tanto si $a > 0$ $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{\ln a}{2}, 2\sqrt{a}\right)$ y si $a \leq 0$ $f(x)$ no tiene extremos relativos.

Veamos ahora el crecimiento. $f'(x) = e^x - a \cdot e^{-x} > 0 \Rightarrow e^x - \frac{a}{e^x} > 0 \Rightarrow e^{2x} - a > 0 \Rightarrow e^{2x} > a$

-. Si $a \leq 0 \Rightarrow$ como $e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, +\infty)$.

-. Si $a > 0 \Rightarrow e^{2x} > a \Rightarrow 2x > \ln a \Rightarrow x > \frac{\ln a}{2} \Rightarrow f(x)$ es creciente en $\left(\frac{\ln a}{2}, +\infty\right)$ y es decreciente en $\left(-\infty, \frac{\ln a}{2}\right)$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la recta $y = k$ es asíntota horizontal.

Partiendo de que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ tenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + a \cdot e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x + a \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$

$$\begin{cases} \text{Si } a \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + a \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = (+\infty) + a \cdot 0 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + a \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = 0 + a \cdot (+\infty) = \infty \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ no tiene asíntota horizontal} \\ \text{Si } a = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \text{la recta } y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La recta de ecuación $y = 2x - 7$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ en el punto $x = 1$. Calcula a y b .

Solución:

La recta $y = 2x - 7$ y la curva $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ son tangentes en $x = 1 \Rightarrow$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\begin{cases} \text{el punto } (1, -5) \text{ pertenece a la recta y a la curva} \Rightarrow f(1) = -5 \Rightarrow 1 + a + b + 2 = -5 \\ f'(1) = \text{pendiente de la recta tangente en } x = 1 \Rightarrow f'(1) = 2 \Rightarrow 3 + 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -8 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -15 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 + 7x^2 - 15x + 2$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la función $f(x) = x \cdot e^{1/x}$, se pide determinar sus asíntotas.

Solución:

-. *Asíntotas horizontales*: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot e^{1/x}) = \infty \cdot e^0 = \infty \Rightarrow f(x)$ no tiene asíntota horizontal

-. *Asíntotas verticales*: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot e^{1/x}) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x \cdot e^{1/x}) = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot e^{1/x}) = 0 \cdot e^{+\infty} \Rightarrow \text{indeterminación } 0 \cdot \infty \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot e^{1/x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}} = \left(\text{ind. } \frac{\infty}{\infty}, \text{ aplicamos L'Hôpital} \right) \triangleq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty ;$$

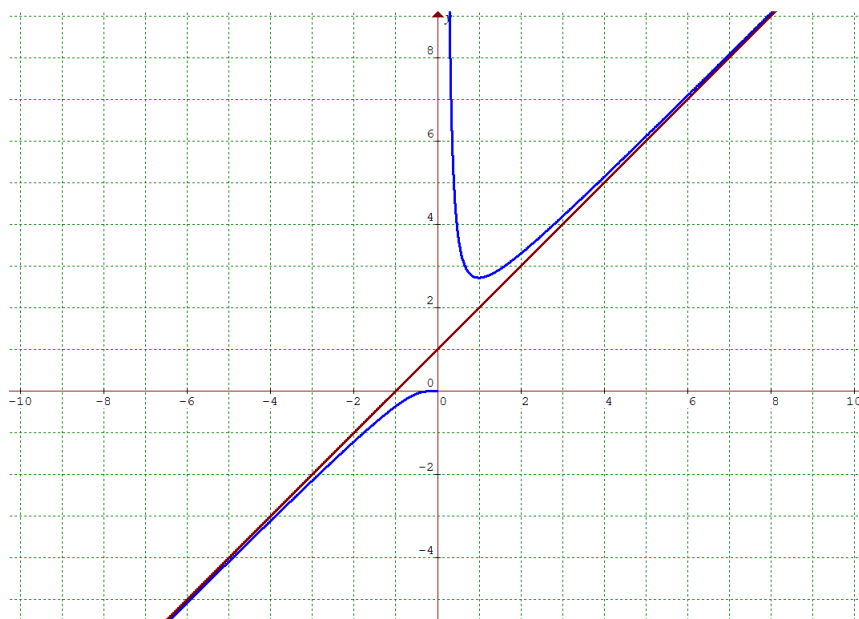
$x = 0$ es una *asíntota vertical* de $f(x)$ cuando $x \rightarrow 0^+$

-. *Asíntotas oblicuas*: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (mx + n) \Rightarrow \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = e^0 = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot e^{1/x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \cdot (e^{1/x} - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} \triangleq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = e^0 = 1 \Rightarrow n = 1$$

$y = x + 1$ es una *asíntota oblicua* de $f(x)$.



Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función $f(x) = \left| \sin(2x) - \frac{1}{2} \right|$.

- Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$.
- Encuentra los extremos relativos de la función en ese intervalo.

Solución:

$g(x) = \sin 2x - \frac{1}{2}$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$ por ser suma de funciones continuas $\Rightarrow$

$f(x) = \left| \sin 2x - \frac{1}{2} \right|$ también será una función continua en $\mathbb{R}$ puesto que el valor absoluto de una función continua es una función continua $\Rightarrow$ Comprobemos, por la definición, que $f(x) = \left| \sin 2x - \frac{1}{2} \right|$ es continua en el intervalo $(0, \pi)$.

$$\sin 2x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \\ 2x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

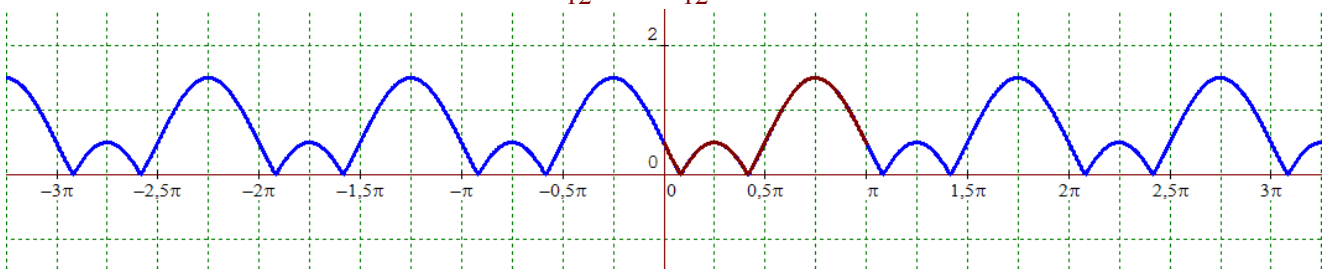
$$f(x) = \left| \sin 2x - \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} -\sin 2x + \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{12} \\ \sin 2x - \frac{1}{2} & \text{si } \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \\ -\sin 2x + \frac{1}{2} & \text{si } \frac{5\pi}{12} \leq x < \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}^-} \left(-\sin 2x + \frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}^+} \left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right) \\ f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 0 = \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{12}^-} \left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{12}^+} \left(-\sin 2x + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Analicemos ahora la derivabilidad de $f(x)$. La función es derivable en todos los puntos salvo, quizás, en $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{5\pi}{12}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2\cos 2x & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{12} \\ 2\cos 2x & \text{si } \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \\ -2\cos 2x & \text{si } \frac{5\pi}{12} < x < \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-\left(\frac{\pi}{12}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}^-} (-2\cos 2x) = -\sqrt{3} \\ f'_+\left(\frac{\pi}{12}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}^+} (2\cos 2x) = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow f'_-\left(\frac{\pi}{12}\right) \neq f'_+\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\begin{cases} f'_-\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{12}^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{12}^-} (2\cos 2x) = -\sqrt{3} \\ f'_+\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{12}^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{12}^+} (-2\cos 2x) = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow f'_-\left(\frac{5\pi}{12}\right) \neq f'_+\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

Entonces, $f(x)$ no es derivable en los puntos $x = \frac{\pi}{12}$ y $x = \frac{5\pi}{12}$ del intervalo $(0, \pi)$



Cuando la función $f(x)$ es derivable, los extremos relativos los obtenemos como soluciones de la

$$\text{ecuación } f'(x)=0 \text{ en } (0,\pi) \Rightarrow \text{ en todos los casos tenemos: } \cos 2x=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{4} \\ 2x=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} 4\operatorname{sen} 2x & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{12} \\ -4\operatorname{sen} 2x & \text{si } \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \\ 4\operatorname{sen} 2x & \text{si } \frac{5\pi}{12} < x < \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\operatorname{sen} \frac{2\pi}{4}=-4 < 0 \Rightarrow \text{ en } x=\frac{\pi}{4} \text{ hay un máximo relativo.} \\ f''\left(\frac{3\pi}{4}\right)=4\operatorname{sen} \frac{6\pi}{4}=-4 < 0 \Rightarrow \text{ en } x=\frac{3\pi}{4} \text{ hay un máximo relativo.} \end{cases}$$

Como $f(x)=\left|\operatorname{sen}(2x)-\frac{1}{2}\right| \Rightarrow$ donde $\operatorname{sen}(2x)-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow f(x)$ tiene un mínimo relativo $\Rightarrow$ en $x=\frac{\pi}{12}$ y $x=\frac{5\pi}{12}$ hay mínimos relativos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

- (2 puntos) Probar que existe un único número real x que es solución de la ecuación $\operatorname{sen}^2 x = 3x - 4$.
- (1 punto) Calcular dicha solución con una cifra decimal exacta.

Solución:

Tenemos la ecuación $\operatorname{sen}^2 x = 3x - 4 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x - 3x + 4 = 0$, las soluciones de esta ecuación coinciden con los ceros de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - 3x + 4$.

$f(x)$ es una función continua y derivable en todo $x \in \mathbb{R}$, en particular, $f(x)$ es continua en el intervalo $[0, \pi]$ con $f(0) = 4 > 0$ y $f(\pi) = -3\pi + 4 < 0 \Rightarrow$ aplicando el teorema de Bolzano, tenemos que $\exists x_0 \in (0, \pi)$ tal que $f(x_0) = 0 \Rightarrow$ la ecuación $\operatorname{sen}^2 x - 3x + 4 = 0$ tiene, al menos, una solución x_0 , con $0 < x_0 < \pi$.

Veamos que esa solución es única. Para ello suponemos que la ecuación $\operatorname{sen}^2 x - 3x + 4 = 0$ tiene dos soluciones distintas x_0 y x_1 , con $x_0 < x_1$. Entonces, $f(x)$ es continua en $[x_0, x_1]$, $f(x)$ es derivable en (x_0, x_1) y $f(x_0) = 0 = f(x_1)$, por el teorema de Rolle, debe existir $c \in (x_0, x_1)$ tal que $f'(c) = 0$.

Pero $f'(x) = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x - 3$ y para que $f'(x) = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 2x - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = 3$, lo cual es imposible $\Rightarrow$ no existe $c \in \mathbb{R}$; esto entra en contradicción con lo que nos garantizaba el teorema de Rolle $\Rightarrow$ el supuesto de que la ecuación tenía dos soluciones reales diferentes es falso y concluimos que:

$\operatorname{sen}^2 x - 3x + 4 = 0$ tiene una única solución real.

Vamos a calcular ahora dicha solución con una cifra decimal exacta, aplicando sucesivamente el teorema de Bolzano. Ya sabemos que la solución x_0 está en el intervalo $(0, \pi)$.

$$\begin{cases} f(1) = \operatorname{sen}^2(1) - 3 + 4 > 0 \\ f(\pi) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \in (1, \pi); \begin{cases} f(1) > 0 \\ f(2) = \operatorname{sen}^2(2) - 6 + 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \in (1, 2); \begin{cases} f(1'6) = \operatorname{sen}^2(1'6) - 4'8 + 4 > 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \in (1'6, 2)$$

$$\begin{cases} f(1'6) > 0 \\ f(1'7) = \operatorname{sen}^2(1'7) - 5'1 + 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \in (1'6, 1'7) \Rightarrow x_0 \approx 1'6$$