

Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$ en su punto de inflexión.

Calculamos el punto de inflexión de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x$$

$$f''(x) = 12x - 12; f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1$$

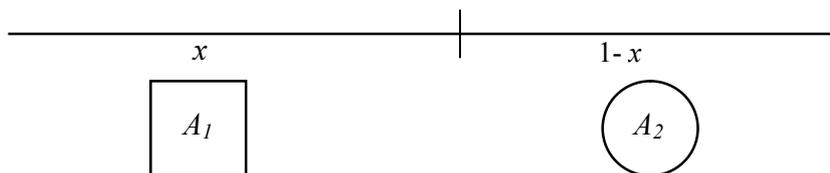
$$f'''(x) = 12 \Rightarrow f'''(1) \neq 0 \Rightarrow \text{en } x = 1, f(x) \text{ tiene su punto de inflexión.}$$

Punto de tangencia $(1, f(1)) \Rightarrow (1, 0)$. La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en ese punto será $m = f'(1) \Rightarrow m = -6$

La ecuación de la recta pedida es $y - 0 = -6(x - 1) \Rightarrow y = -6x + 6$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se divide una cuerda de longitud 1 en dos partes, no necesariamente iguales, para construir un cuadrado y una circunferencia. Probar que de todas las posibilidades, la que encierra un área total mínima surge cuando el radio del círculo es la mitad que el lado del cuadrado.



$$A_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \Rightarrow A_1 = \frac{x^2}{16}; \text{ en el círculo se cumple } 2\pi r = 1-x \Rightarrow r = \frac{1-x}{2\pi} \Rightarrow A_2 = \pi \left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow A_2 = \frac{(1-x)^2}{4\pi}$$

$$\text{El área total será una función en } x: A(x) = A_1 + A_2 \Rightarrow A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(1-x)^2}{4\pi}$$

$$\text{buscamos el mínimo de esta función, } A'(x) = \frac{x}{8} - \frac{1-x}{2\pi}; A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{8} - \frac{1-x}{2\pi} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{\pi+4}$$

$$\text{comprobamos que es un mínimo, } A''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} \Rightarrow A''\left(\frac{4}{\pi+4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0$$

$$\text{entonces el área total es mínima cuando } x = \frac{4}{\pi+4} \text{ y el lado del cuadrado es } l = \frac{x}{4} \Rightarrow l = \frac{1}{\pi+4}$$

$$\text{por otra parte el radio del círculo es } r = \frac{1-x}{2\pi} \Rightarrow r = \frac{1 - \frac{4}{\pi+4}}{2\pi} \Rightarrow r = \frac{1}{2(\pi+4)} \text{ y se cumple que } r = \frac{l}{2}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Prueba que la función $f(x) = \frac{3x+1}{3-\cos x}$ alcanza el valor 2 en un único punto de su dominio.

$f(x) = \frac{3x+1}{3-\cos x}$ es una función continua en el intervalo $[0, \pi]$ por ser cociente de funciones continuas y $3-\cos x \neq 0$ como $f(0) = \frac{1}{2} < 2$ y $f(\pi) = \frac{3\pi+1}{4} > 2$, aplicando la propiedad de Darboux tenemos que $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3\pi+1}{4}$ al menos una vez en el intervalo $(0, \pi) \Rightarrow f(x) = 2$ en $(0, \pi)$.

Veamos que ocurre en un único punto, entonces la ecuación $\frac{3x+1}{3-\cos x} = 2 \Rightarrow 2\cos x + 3x - 5 = 0$ sólo tiene una solución. Supongamos que $2\cos x + 3x - 5 = 0$ tiene dos soluciones, x_1 y x_2 ($x_1 < x_2$); definimos la función $g(x) = 2\cos x + 3x - 5$ $g(x)$ es continua en $[x_1, x_2]$, derivable en (x_1, x_2) y $g(x_1) = g(x_2)$ ya que en ambos puntos $g(x) = 0 \Rightarrow$ estamos en las condiciones del teorema de Rolle $\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2)$ tal que $g'(c) = 0$ pero $g'(x) = -2\sin x + 3$ y $g'(x) = 0 \Rightarrow -2\sin x + 3 = 0 \Rightarrow \sin x \neq \frac{3}{2}$ con lo que llegamos a una contradicción.

Por todo lo anterior la ecuación $\frac{3x+1}{3-\cos x} = 2$ sólo tiene una solución y queda demostrado.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que: $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 4$.

Se pide:

- Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$. (1 punto)

- Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$. (2 puntos)

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f'(0) = 3, f'(1) = 4$$

$$g(x) = f(x + f(0)) \Rightarrow g(x) = f(x + 1) \Rightarrow g'(x) = f'(x + 1) \Rightarrow g'(0) = f'(0 + 1) = f'(1) \Rightarrow g'(0) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \left(\text{indet. } \frac{0}{0} \text{ y aplicamos L'Hôpital} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x) \cdot f'(x) - f'(x+1)}{e^x} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3 - 4}{e^0} = 8$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x-4) + 17$. Demuestra que la función derivada $f'(x)$ posee al menos una raíz real en el intervalo $(0, 4)$.

$f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x-4) + 17$ es una función continua en el intervalo $[0, 4]$ y derivable en $(0, 4)$ por ser producto y suma de funciones continuas y derivables y además $f(0) = f(4) = 17$ con lo que estamos en las condiciones del teorema de Rolle $\Rightarrow \exists x_0 \in (0, 4)$ tal que $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x)$ posee al menos una raíz real en $(0, 4)$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula los límites siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x \cdot (1 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \left(\text{indet. } \frac{0}{0}, L'Hôpital \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{-2 \cos x \cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot (1 - 2 \operatorname{sen} x)}{-2 \cos x \cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 2 \operatorname{sen} x)}{-2 \operatorname{sen} x} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x} &= \left(\text{indet. } \infty^0 \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x} = A \Rightarrow \ln A = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \left(\frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{1}{x^2} \right)}{\operatorname{cotg} x} = \left(\text{indet. } \frac{\infty}{\infty}, L'Hôp. \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{-2}{x^3} \right)}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2}{x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{x} = \left(\text{indet. } \frac{0}{0}, L'Hôp. \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1} = 0 \Rightarrow A = e^0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) &= \left(\text{indet. } \infty - \infty \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})}{(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + x) - (x^2 - x)}{(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ una función que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

- Determinar a , b , c y d .
- ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0 \\ f'(0) = 2 \Rightarrow c = 2 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + d = -2 \\ 3a + 2b = -2 \\ 12a + 4b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a - 4b = 4 \\ 12a + 4b = -2 \\ 6a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 2 \\ d = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

Veamos si los extremos relativos que están en $x = 1$ y $x = 2$ son máximos o mínimos

$$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(x) = 2x - 3 ;$$

$$f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow \text{en } x = 1 \text{ máximo} / f''(2) = 1 > 0 \Rightarrow \text{en } x = 2 \text{ mínimo.}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función definida del modo siguiente: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Halla los valores de a y b para que la función cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[-3, 2]$.
- Con los valores obtenidos, halla los puntos de la curva $y = f(x)$ en los que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $A = (-3, f(-3))$ y $B = (2, f(2))$.

Para que $f(x)$ cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange debe ser continua en $[-3, 2]$ y derivable en $(-3, 2)$.

$f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} , salvo quizás en $x = 0$. Vamos a imponer que sea continua en ese punto.

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \quad f(0) = 0^2 + 4 \cdot 0 + 3 \Rightarrow f(0) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 4x + 3) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + ax + b) = b \end{cases} \Rightarrow b = 3$$

$f(x)$ es derivable en todo \mathbb{R} , salvo quizás en $x=0$. Vamos a imponer que sea derivable en ese punto.

$$f'_-(0) = f'_+(0)$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(0+h)^2 + 4(0+h) + 3 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(h+4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (h+4) = 4$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(0+h)^2 + a(0+h) + 3 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(-h+a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h+a) = a$$

entonces $a = 4$

Como $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema de Lagrange $\Rightarrow \exists x_0 \in (-3, 2) / f'(x_0) = \frac{f(2) - f(-3)}{2 - (-3)}$

en esos puntos la recta tangente es paralela a la recta que une los puntos $(-3, f(-3))$ y $(2, f(2))$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 4x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \leq 0 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(-3)}{2 - (-3)} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{7 - 0}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 + 4 = \frac{7}{5} \Rightarrow x_0 = -\frac{13}{10} \\ -2x_0 + 4 = \frac{7}{5} \Rightarrow x_0 = \frac{13}{10} \end{cases}$$