

Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = e^{1-x^2}$ en los puntos de intersección con la recta $y = 1$.

Calculemos los cortes entre la recta y la curva:

$$\begin{cases} y=1 \\ y=e^{1-x^2} \end{cases} \Rightarrow 1=e^{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}; \text{ entonces los puntos son } p_1=(1,1) \text{ y } p_2=(-1,1)$$

las pendientes de las rectas tangentes a la curva en esos puntos serán:

$$\begin{cases} m_1 = f'(1) \\ m_2 = f'(-1) \end{cases}, \quad f(x) = e^{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2x \cdot e^{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = f'(1) = -2 \\ m_2 = f'(-1) = 2 \end{cases}$$

La ecuación de una recta en forma punto pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$, entonces las rectas pedidas son

$$\begin{cases} r_1 \equiv y - 1 = -2(x - 1) \Rightarrow r_1 \equiv y + 2x - 3 = 0 \\ r_2 \equiv y - 1 = 2(x + 1) \Rightarrow r_2 \equiv y - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula los límites siguientes:

↓ indeterminación $0 \cdot \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^3 \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-3}} \triangleq (L' \text{ H\^o}pital) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^{-2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{-3x^{-4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{3x^{-2}} \triangleq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^{-2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{-6x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{6x^{-1}} \triangleq \\ &\triangleq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^{-2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{-6x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{6} = +\infty \quad \left(\text{nota: } \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\lg x} = A \Rightarrow \ln A &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\lg x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\lg x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lg x \cdot (\ln 1 - \ln x^2) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \ln x}{\cotg x} \triangleq \\ &\triangleq (L' \text{ H\^o}pital) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2}{x}}{\frac{-1}{\sen^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sen^2 x}{x} \triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sen x \cdot \cos x}{1} = 0 \Rightarrow \ln A = 0 \Rightarrow A = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sen x \cdot (1 - \sen x)}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sen x \cdot (1 - \sen x)}{1 - \sen^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sen x \cdot (1 - \sen x)}{(1 + \sen x)(1 - \sen x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sen x}{1 + \sen x} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula m , n y b para que la función definida de la forma: $f(x) = \begin{cases} mx^2 + nx + 5 & \text{si } x < 1 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ cumpla las

hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, b]$, y determina el valor intermedio garantizado por el teorema.

$$f(x) = \begin{cases} mx^2 + nx + 5 & \text{si } x < 1 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle, $f(x)$ debe ser continua en $[-2, b]$, derivable en $(-2, b)$ y $f(-2) = f(b)$. $f(x)$, por ser polinómica, es siempre continua salvo en $x = 1$. Imponemos que $f(x)$ sea continua en $x = 1 \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$f(1) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx^2 + nx + 5) = m + n + 5 \end{cases} \Rightarrow m + n + 5 = 4 \Rightarrow m + n + 1 = 0$$

$f(x)$, por ser polinómica, es siempre derivable salvo en $x = 1$. Imponemos que $f(x)$ sea derivable en $x = 1 \Rightarrow f'_+(1) = f'_-(1)$

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(1+h) + 1 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 3 = 3$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{m(1+h)^2 + n(1+h) + 5 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{mh^2 + 2mh + nh + m + n + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{mh^2 + 2mh + nh}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(mh + 2m + n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (mh + 2m + n) = 2m + n$$

$$\text{entonces } 2m + n = 3 \Rightarrow \begin{cases} m + n = -1 \\ 2m + n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = -5 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 5x + 5 & \text{si } x < 1 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Ahora debe cumplirse } f(-2) = f(b) \Rightarrow f(-2) = 31 \quad y \quad f(b) = \begin{cases} 4b^2 - 5b + 5 & \text{si } -2 < b < 1 \\ 3b + 1 & \text{si } b \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b^2 - 5b + 5 = 31 \Rightarrow 4b^2 - 5b - 26 = 0 \Rightarrow \cancel{b = -2} \text{ o } \cancel{b = \frac{13}{4}} \\ 3b + 1 = 31 \Rightarrow b = 10 \end{cases}$$

Busquemos entonces $x_0 \in (-2, 10) / f'(x_0) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 8x - 5 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 8x - 5 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{8} \text{ que está en } (-2, 10)$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera la ecuación $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$.

- Probar que si $\lambda > 2$, la ecuación admite alguna solución menor que 1.
- Probar que si $\lambda < 2$, la ecuación admite alguna solución mayor que 1.

$x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1 \Rightarrow x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1 = 0$; sea la función $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1$, $f(x)$ es una función siempre continua, por ser polinómica y los puntos x_0 tales que $f(x_0) = 0$ son raíces de la ecuación.

a) Para $\lambda > 2$, $f(x)$ es continua en $[0,1]$, con $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = \lambda - 2 > 0$, entonces, por el teorema de Bolzano, $\exists x_0 \in (0,1)$ tal que $f(x_0) = 0 \Rightarrow$ la ecuación admite alguna solución menor que 1.

b) Para $0 \leq \lambda < 2$, $f(x)$ es continua en $[1,2]$, con $f(1) = \lambda - 2 < 0$ y $f(2) = 4\lambda + 3 > 0$, entonces, por el teorema de Bolzano, $\exists x_0 \in (1,2)$ tal que $f(x_0) = 0 \Rightarrow$ la ecuación admite alguna solución mayor que 1.

Para $\lambda < 0$, $f(x)$ es continua en $[1, 2 - \lambda]$, con $f(1) = \lambda - 2 < 0$ y $f(2 - \lambda) = (2 - \lambda)^3 + \lambda(2 - \lambda)^2 - 2(2 - \lambda) - 1$
 $f(2 - \lambda) = 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda - 4\lambda^2 + \lambda^3 - 4 + 2\lambda - 1 = 2\lambda^2 - 6\lambda + 3 > 0 \Rightarrow$ por el teorema de Bolzano,
 $\exists x_0 \in (1, 2 - \lambda)$ tal que $f(x_0) = 0 \Rightarrow$ la ecuación admite alguna solución mayor que 1.

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea α un número real fijo. Probar que existe un único número real $\beta > 0$, que es solución de la ecuación $x + \ln x = \alpha$.

α es un número real fijo. La ecuación $x + \ln x = \alpha$ sólo puede tener soluciones positivas, puesto que $\ln x$ no está definido para $x \leq 0$.

Sea la función $f(x) = x + \ln x - \alpha$, supongamos que existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $0 < x_1 < x_2$, tales que $f(x_1) = f(x_2) = 0$
 x_1 y x_2 serán entonces soluciones de la ecuación $x + \ln x = \alpha$.

$f(x)$ es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2) y además $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ por el teorema de Rolle
 $\exists c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = 0$.

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = -1$, por tanto $c = -1 \Rightarrow$ contradicción puesto que
 $0 < x_1 < c < x_2 \Rightarrow$ la ecuación no puede tener dos soluciones reales.

Veamos que la ecuación tiene una solución $\beta > 0$

Si $\alpha = 1 \Rightarrow x + \ln x = 1 \Rightarrow \beta = 1$ es solución de la ecuación.

Si $\alpha > 1 \Rightarrow$ la función $f(x) = x + \ln x - \alpha$ es continua en $[1, \alpha]$, $f(1) = 1 - \alpha < 0$ y $f(\alpha) = \ln \alpha > 0 \Rightarrow$ por el teorema de Bolzano $\exists \beta \in (1, \alpha)$ ($1 < \beta < \alpha$) tal que $f(\beta) = 0 \Rightarrow \exists \beta > 0$ que es solución de la ecuación.

Si $\alpha < 1 \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon + \ln \varepsilon - \alpha < 0$, ya que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
entonces $f(x) = x + \ln x - \alpha$ es continua en $[\varepsilon, 1]$, $f(\varepsilon) = \varepsilon + \ln \varepsilon - \alpha < 0$ y $f(1) = 1 - \alpha > 0 \Rightarrow$ por el teorema de Bolzano $\exists \beta \in (\varepsilon, 1)$ ($0 < \varepsilon < \beta < 1$) tal que $f(\beta) = 0 \Rightarrow \exists \beta > 0$ que es solución de la ecuación.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Supóngase que f es continua para todo número real x , excepto para $x = 6$. Si $g(x) = \frac{3x}{x-2}$ ¿para qué valores de x puede asegurarse la continuidad de la función $f \circ g$?

$f(x)$ es una función continua para todo número real x , salvo para $x = 6$.

$$g(x) = \frac{3x}{x-2} \text{ es continua } \forall x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en $x = x_0 \Leftrightarrow g(x)$ es continua en $x = x_0$ y $f(x)$ es continua en $x = g(x_0)$

Por tanto la función $(f \circ g)(x)$ no es continua en $x = 2$.

Veamos cuando $g(x) = 6 \Rightarrow \frac{3x}{x-2} = 6 \Rightarrow x = 4$, entonces $f(x)$ no es continua en $x = g(4)$ y la función $(f \circ g)(x)$ no es continua en $x = 4$. Tenemos entonces que $(f \circ g)(x)$ es continua $\forall x \in (-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Estúdiese la derivabilidad de la función $f(x) = x + |1 - \ln x|$ y hállese la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x=2$.

$$\text{Dom } f(x) = (0, +\infty)$$

$$f(x) = x + |1 - \ln x| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + 1 - \ln x & \text{si } 0 < x < e \\ x - 1 + \ln x & \text{si } x \geq e \end{cases}$$

$f(x)$ es suma de funciones derivables $\Rightarrow f(x)$ es derivable en todos los puntos de su dominio, salvo quizás en el punto $x = e$.

Veamos si $f(x)$ es derivable en $x = e$, para ello debe cumplirse que $f'_-(e) = f'_+(e)$

$$f'_-(e) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(e+h) - f(e)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(e+h) + 1 - \ln(e+h) - e}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h + 1 - \ln(e+h)}{h} \triangleq (L' \text{ H\^o}pital) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - \frac{1}{e+h}}{1} = 1 - \frac{1}{e}$$

$$f'_+(e) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(e+h) - f(e)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(e+h) - 1 + \ln(e+h) - e}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - 1 + \ln(e+h)}{h} \triangleq (L' \text{ H\^o}pital) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{1}{e+h}}{1} = 1 + \frac{1}{e}$$

$$1 - \frac{1}{e} \neq 1 + \frac{1}{e} \Rightarrow f'_-(e) \neq f'_+(e) \Rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = e \quad (\text{observar que } f(x) \text{ si es continua en } x = e)$$

Calculemos ahora la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

$$\text{Como } 2 < e \Rightarrow f(2) = 2 + 1 - \ln 2 \Rightarrow f(2) = 3 - \ln 2. \text{ Para } x < e, f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Entonces la recta pedida es } y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y - (3 - \ln 2) = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 2 - \ln 2$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcular cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en el intervalo $[0, 5]$ existe un c tal que $f'(c) = 8$.

f es una función continua y derivable $\Rightarrow f$ será continua en $[0, 5]$ y derivable en $(0, 5) \Rightarrow$ por el teorema del valor medio de Lagrange, $\exists c \in (0, 5)$ tal que $f'(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} \Rightarrow 8 = \frac{f(5) - 3}{5} \Rightarrow f(5) = 43$