

Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A^{-1} = B$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

Hay que resolver la ecuación $A \cdot X \cdot A^{-1} = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot B \cdot A$;

$I_3 \cdot X \cdot I_3 = A^{-1} \cdot B \cdot A$; entonces, la matriz X pedida será $X = A^{-1} \cdot B \cdot A$

Calculemos A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = -1$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 & A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \text{ ahora calculamos } X = A^{-1} \cdot B \cdot A$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -4 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -4 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 3x & 2 & x-1 \\ 3z & 1 & z-1 \\ 3y & 0 & y-1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 2 & 6 \\ x+4 & y & z+2 \end{vmatrix}, \quad c) \left| 2(A \cdot A^t)^{-1} \right|$$

Solución:

$$\begin{aligned} a) \begin{vmatrix} 3x & 2 & x-1 \\ 3z & 1 & z-1 \\ 3y & 0 & y-1 \end{vmatrix} &= 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 2 & x-1 \\ z & 1 & z-1 \\ y & 0 & y-1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} x & 2 & x \\ z & 1 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = -3 \cdot \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ z & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2} \quad \uparrow \\ & \quad \quad \quad 0 \end{aligned}$$

$$b) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 2 & 6 \\ x+4 & y & z+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 2 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 10 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{F_3=F_3-F_2} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$$

$$c) \left| 2(A \cdot A')^{-1} \right| = 2^3 \cdot \left| (A \cdot A')^{-1} \right| = 8 \cdot \frac{1}{|A \cdot A'|} = 8 \cdot \frac{1}{|A| \cdot |A'|} = 8 \cdot \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{8}{25}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ (A \cdot A')^{-1} \in M_{3 \times 3} & |A| = |A'| \end{matrix}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea H el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $e_1 = (a, 2, -a, 0)$, $e_2 = (2, a, 0, 3)$, $e_3 = (3, 0, 2, 2)$ y $e_4 = (2, a, 2, -5)$. Encontrar a sabiendo que $H \neq \mathbb{R}^4$.

Solución:

H es el subespacio generado por $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$; como $H \neq \mathbb{R}^4$ y $\dim \mathbb{R}^4 = 4 \Rightarrow$ los vectores e_1, e_2, e_3 y e_4 deben ser linealmente dependientes puesto que si no fuese así, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sería base de $\mathbb{R}^4$ y $H = \mathbb{R}^4$.

Para que los vectores e_1, e_2, e_3 y e_4 sean linealmente dependientes, el determinante que formamos con ellos tiene que ser cero.

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & 2 \\ 2 & a & 0 & a \\ -a & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}_{C_4=C_4-C_2} = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 & 0 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -8 \end{vmatrix}_{F_4=F_4+4F_3} = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 & 0 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 2 & 2 \\ -4a & 3 & 10 & 0 \end{vmatrix}_{\substack{\text{Desarrollamos} \\ \text{por la } C_4}} = 2 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ -4a & 3 & 10 \end{vmatrix}_{F_3=F_3+4F_1} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 11 & 22 \end{vmatrix} = -22 \cdot \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{C_3=C_3-2C_2} = -22 \cdot \begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & a & -2a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{\substack{\text{desarrollamos} \\ \text{por la } F_3}} = -22 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a & -1 \\ 2 & -2a \end{vmatrix} = 22(-2a^2 + 2)$$

$$22(-2a^2 + 2) = 0 \Rightarrow -2a^2 + 2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Resuelve la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Extraemos } (x-1) \text{ de } C_1 \\ \text{Extraemos } (x+1) \text{ de } C_3}}{=} (x-1) \cdot (x+1) \cdot \begin{vmatrix} 2(x+1) & x+1 & x+1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ x-1 & x-1 & x-1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Extraemos } (x+1) \text{ de } F_1 \\ \text{Extraemos } (x-1) \text{ de } F_3}}{=} \\ = (x-1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1=F_1-F_3 \\ F_2=F_2-F_3}}{=} (x-1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{determinante de matriz triangular}}{=} (x-1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot x \\ \Rightarrow (x-1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sabiendo que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, probar que el sistema formado por los vectores

$B' = \{u_1 = e_1 + e_2 + e_3, u_2 = e_1 - e_2 + e_3, u_3 = 2e_1 + 3e_3\}$ también es base de $\mathbb{R}^3$.

Dado el vector $v = (2, -1, 5)$, cuyas coordenadas están expresadas en la base B , encontrar sus coordenadas en la base B' .

Solución:

$$\left. \begin{aligned} u_1 = e_1 + e_2 + e_3 &\Rightarrow u_1 = (1, 1, 1) \text{ en la base } B \\ u_2 = e_1 - e_2 + e_3 &\Rightarrow u_2 = (1, -1, 1) \text{ en la base } B \\ u_3 = 2e_1 + 3e_3 &\Rightarrow u_3 = (2, 0, 3) \text{ en la base } B \end{aligned} \right\}$$

para que $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ sea base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow B'$ tiene que ser un sistema de generadores y sistema libre.

Como sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ y B' está formado por tres vectores, si estos son linealmente independientes son base de $\mathbb{R}^3$.

Veamos que B' es un sistema libre, para ello consideramos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{las tres columnas del determinante son linealmente independientes.}$$

Por tanto B' es una base de $\mathbb{R}^3$

Busquemos ahora las coordenadas del vector v en la base B' .

$$\left. \begin{array}{l} v = (2, -1, 5) \text{ en } B \Rightarrow v = 2e_1 - e_2 + 5e_3 \\ v = (x, y, z) \text{ en } B' \Rightarrow v = x \cdot u_1 + y \cdot u_2 + z \cdot u_3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2e_1 - e_2 + 5e_3 = x \cdot u_1 + y \cdot u_2 + z \cdot u_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2e_1 - e_2 + 5e_3 = x \cdot (e_1 + e_2 + e_3) + y \cdot (e_1 - e_2 + e_3) + z \cdot (2e_1 + 3e_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2e_1 - e_2 + 5e_3 = (x + y + 2z) \cdot e_1 + (x - y) \cdot e_2 + (x + y + 3z) \cdot e_3, \text{ entonces, como } \{e_1, e_2, e_3\} \text{ son base de } \mathbb{R}^3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede poner como combinación lineal de ellos de forma única, por tanto:

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = -1 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases} \quad (3^a \text{ ec.} - 1^a \text{ ec.}) \Rightarrow z = 3 \Rightarrow \text{tenemos } \begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}, y = -\frac{3}{2}$$

$$\text{con lo que } v = -\frac{5}{2} \cdot u_1 - \frac{3}{2} \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 \Rightarrow v = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 3\right) \text{ en la base } B'$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Calcular el valor de $|2A \cdot A^t|$.
- Calcular el valor de $|A^t \cdot A|$.

Solución:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |2A \cdot A^t| = 2^3 \cdot |A \cdot A^t| = 8 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 99 = 792$$

$$\begin{aligned} A^t \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^t \cdot A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{F_1=F_1+F_2}{F_4=F_4-2F_1} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -11 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \underset{\text{desarrollamos por } C_4}{1 \cdot (-1)^{2+4}} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & -11 & -4 \end{vmatrix} \stackrel{F_2=F_2+3F_1}{F_3=F_3-4F_1} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 12 & 20 & 0 \\ -21 & -35 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{desarrollamos por } C_3} = -1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 20 \\ -21 & -35 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 \cdot (-7) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ a & a & a+2 \end{pmatrix}$, encontrar los valores de a para los que la matriz admite inversa y calcular dicha inversa para $a = -1$.

Solución:

$$A^{-1} \text{ existe} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ a & a & a+2 \end{vmatrix} \underset{C_3=C_3+C_1}{=} \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & a-1 & a \\ a & a & 2a+2 \end{vmatrix} \underset{\text{desarrollamos por } F_1}{=} -a \cdot \begin{vmatrix} a-1 & a \\ a & 2a+2 \end{vmatrix} = -a \cdot [(a-1)(2a+2) - a^2] =$$

$$= -a \cdot (a^2 - 2) \Rightarrow -a(a^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \sqrt{2} \\ a = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow A \text{ admite inversa para } a \neq 0, a \neq \sqrt{2}, a \neq -\sqrt{2}$$

$$\text{Calculemos ahora } A^{-1} \text{ para } a = -1. \quad |A| = -a \cdot (a^2 - 2) \Rightarrow |A| = -(-1)((-1)^2 - 2) = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 & A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 & A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \\ A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 & A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 & A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 & A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 & A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, encuentra X tal que $A + X \cdot B = C$.

Solución:

$$\text{Como } A, B \text{ y } C \text{ son matrices de orden } 2 \times 2 \Rightarrow X \in M_{2 \times 2} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{Por otro lado } A + X \cdot B = C \Leftrightarrow X \cdot B = C - A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+b & a+b \\ 2c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-2 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-2, b=2$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2c+d=2 \\ c+d=-1 \end{cases} \Rightarrow c=3, d=-4$$

También podemos resolverlo así: $X \cdot B = C - A \Rightarrow X = (C - A) \cdot B^{-1}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B|=1 \quad \begin{matrix} B_{11}=1 & B_{21}=-1 \\ B_{12}=-1 & B_{22}=2 \end{matrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} ; C - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$