

Opción A

Ejercicio 1.

Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B - C = D$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$X \in M_{3 \times 2}$. La mejor forma de resolver esta ecuación matricial, dado que las matrices que intervienen en el producto tienen pocos ceros, es la siguiente:

$$\begin{aligned} A \cdot X \cdot B - C &= D \Rightarrow A \cdot X \cdot B = D + C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (D + C) \cdot B^{-1} \\ \Rightarrow X &= A^{-1} \cdot (D + C) \cdot B^{-1}, \text{ entonces calculamos las inversas de } A \text{ y } B \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 - 12 - 3 = -2$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9 & A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= 1 & B_{21} &= -(-3) = 3 \\ B_{12} &= -1 & B_{22} &= -5 \end{aligned} \Rightarrow B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 8 & 4 \\ 19 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

Probar, aplicando las propiedades de los determinantes, la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1=F_1+F_2+F_3} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2=C_2-C_1 \\ C_3=C_3-C_1}} \\ & = \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.

Calcula para qué valor, o valores, de x admite inversa la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y halla

A^{-1} para $x=3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -x^2 + 6 - 1 = 5 - x^2$$

A^{-1} existe $\Leftrightarrow |A| \neq 0$; $5 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \Rightarrow A$ admite inversa si $x \neq \sqrt{5}$ y $x \neq -\sqrt{5}$

$$\text{para } x=3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}; |A| = -4$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 & A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 6 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 18 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -3 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -5 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \end{aligned} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 6 & 18 & 10 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & a & a & a \\ a & 1-a & a & a & a \\ a & a & 1-a & a & a \\ a & a & a & 1-a & a \\ a & a & a & a & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & a & a & a \\ a & 1-a & a & a & a \\ a & a & 1-a & a & a \\ a & a & a & 1-a & a \\ a & a & a & a & 1-a \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1=C_1-C_5 \\ C_2=C_2-C_5 \\ C_3=C_3-C_5 \\ C_4=C_4-C_5 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1-2a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1-2a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-2a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & a \\ 2a-1 & 2a-1 & 2a-1 & 2a-1 & 1-a \end{vmatrix} \begin{matrix} F_5=F_5+F_1+F_2+F_3+F_4 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-2a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1-2a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-2a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+3a \end{vmatrix} = (1-2a)^4 \cdot (1+3a)$$

Opción B**Ejercicio 1.**

Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 = I - 2A$, donde I denota la matriz identidad.

- Probar que $\det(A) \neq 0$ y encontrar A^{-1} .
- Calcular dos números p y q tales que $A^4 = p \cdot I + q \cdot A$.
- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ cumple la relación de partida, calcular el valor de k .

Sabemos que se cumple $A^2 = I - 2A \Rightarrow A^2 + 2A = I \Rightarrow A(A+2I) = I \Rightarrow |A(A+2I)| = |I| \Rightarrow$
 $\Rightarrow |A||A+2I| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$.

Como tenemos $A(A+2I) = I \Rightarrow A^{-1} = A+2I$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (I - 2A) \cdot (I - 2A) = I - 4A + 4A^2 = I - 4A + 4(I - 2A) = 5I - 12A$, entonces

$p = 5$ y $q = -12$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2+k \\ -2+k & 1+k^2 \end{pmatrix}$$

$$I - 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1-2k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2+k \\ -2+k & 1+k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1-2k \end{pmatrix}$$

entonces $\begin{cases} -2+k = -2 \\ 1+k^2 = 1-2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k^2 + 2k = 0 \Rightarrow k = 0, k = -2 \end{cases} \Rightarrow k = 0$

Ejercicio 2.

- Sea A una matriz 4×4 tal que $|A| = -2$, calcula, justificando la respuesta:

$$|3A|; |-A^{-1}|; |A^4|; |2A \cdot A^{-1}|; |A \cdot A^t|; |(A^t)^{-1}|; |(A^{-1})^t|$$

- Demostrar que si A es una matriz 3×3 tal que $A^t = -A$, entonces $|A| = 0$. ¿Y si A es una matriz $n \times n$, se verifica lo anterior?

$$* |3A| = 3^4 \cdot |A| = 81 \cdot (-2) = -162 \quad (A \text{ es una matriz } 4 \times 4)$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$* |-A^{-1}| = (-1)^4 \cdot |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

$$* |A^4| = |A \cdot A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot |A| = (-2)^4 = 16$$

$$* |2A \cdot A^{-1}| = |2I| = 2^4 \cdot |I| = 16$$

$$* |A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A| \cdot |A| = (-2)^2 = 4$$

$$* |(A^t)^{-1}| = \frac{1}{|A^t|} = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

$$* |(A^{-1})^t| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

Sabemos que se cumple $|A| = |A^t|$; como $A \in M_{3 \times 3} \Rightarrow |-A| = (-1)^3 \cdot |A| = -|A|$, entonces

$$A^t = -A \Rightarrow |A^t| = |-A| \Rightarrow |A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$$

Si $A \in M_{n \times n} \Rightarrow |-A| = (-1)^n |A| \Rightarrow$ si n es impar $|A| = 0$, si n es par no se puede asegurar que $|A| = 0$.

Ejercicio 3.

Hallar una matriz X tal que $A \cdot X \cdot A^t = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X \cdot A^t = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot X \cdot (A^t)^{-1}, \text{ pero } (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \Rightarrow X = A^{-1} \cdot X \cdot (A^{-1})^t$$

$$|A| = 1$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 & A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -2 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.

Resuelve la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 5 & x & x & 3 \\ x & 5 & 3 & x \\ x & 3 & 5 & x \\ 3 & x & x & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & x & x & 3 \\ x & 5 & 3 & x \\ x & 3 & 5 & x \\ 3 & x & x & 5 \end{vmatrix} \begin{smallmatrix} C_4=C_4-C_1 \\ C_3=C_3-C_2 \end{smallmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & x & 0 & -2 \\ x & 5 & -2 & 0 \\ x & 3 & 2 & 0 \\ 3 & x & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{smallmatrix} F_1=F_1+F_4 \\ F_2=F_2+F_3 \end{smallmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2x & 0 & 0 \\ 2x & 8 & 0 & 0 \\ x & 3 & 2 & 0 \\ 3 & x & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{smallmatrix} \text{desarrollo por } C_4 \end{smallmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2x & 0 \\ 2x & 8 & 0 \\ x & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{smallmatrix} \text{desarrollo por } C_3 \end{smallmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2x \\ 2x & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (64 - 4x^2)$$

$$\Rightarrow 4(64 - 4x^2) = 0 \Rightarrow 16 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$$