

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula la ecuación de una esfera que tiene su centro en la recta $r \equiv x-3=y=\frac{z}{2}$, y es tangente al plano $\pi \equiv 2x-y+2z-4=0$ en el punto $P(1,2,2)$.

Solución:

$$r \equiv x-3=y=\frac{z}{2}, \quad P(1,2,2), \quad \pi \equiv 2x-y+2z-4=0$$

Calculamos la recta s perpendicular al plano π y que pasa por P .

$$\text{Vector normal al plano, } \vec{n} = (2, -1, 2) \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{2} \\ \text{Punto } P(1,2,2) \end{array} \right.$$

El centro C de la esfera será el punto de corte entre r y s

$$r \equiv x-3=y=\frac{z}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-3=y \\ y=\frac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \\ \frac{x-1}{2} = \frac{z-2}{2} \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x+2y=5 \\ x-z=-1 \end{cases}$$

$$r \cap s \Rightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ 2y-z=0 \\ x+2y=5 \\ x-z=-1 \end{cases}, \quad |\bar{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -2+4-12 \neq 0$$

Entonces $\text{Rang } \bar{A} = 4 > \text{Rang } A \Rightarrow$ Sistema incompatible $\Rightarrow r$ y s no se cortan y el problema no tiene solución.

Nota

Si la recta r hubiera tenido por ecuación $r \equiv x-3=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$

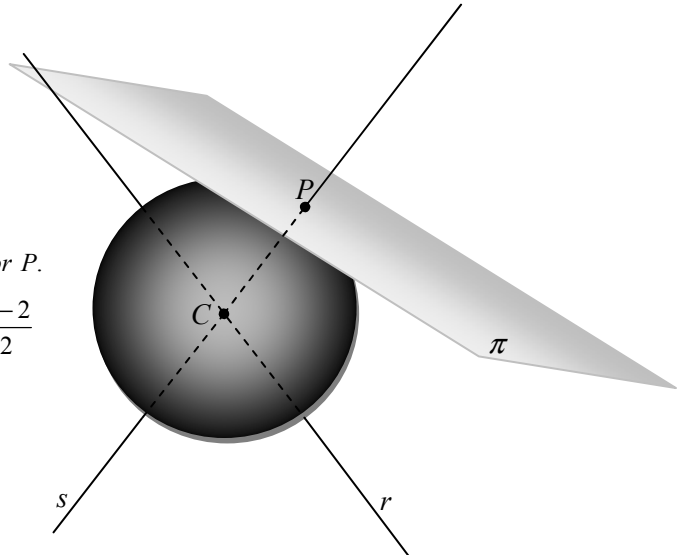
$$r \equiv x-3=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-3=\frac{y-2}{-1} \\ x-3=\frac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+y=5 \\ 3x-z=9 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x+2y=5 \\ x-z=-1 \end{cases}$$

$$r \cap s \Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ 3x-z=9 \\ x+2y=5 \\ x-z=-1 \end{cases}, \quad |\bar{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2=F_2-F_1 \\ F_4=F_4-F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad y \quad \text{Rang } A = 3 \text{ puesto que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces $\text{Rang } \bar{A} = 3 = \text{Rang } A \Rightarrow$ Sistema compatible determinado. $C = \begin{cases} x+y=5 \\ 3x-z=9 \\ x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow C = (5, 0, 6)$

Ahora el radio de la esfera será $|\overline{PC}|$, $\overline{PC} = (4, -2, 4) \Rightarrow R = |\overline{PC}| = \sqrt{16+4+16} = 6$

y la ecuación de la esfera es $S \equiv (x-5)^2 + y^2 + (z-6)^2 = 36$



Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dados los puntos $A(1, -1, 1)$, $B(1, 2, 2)$, $C(2, 1, 1)$, se pide:

- Encuentra la ecuación del plano π que contiene a A , B , y C .
- Calcula el área del triángulo que forman las intersecciones de π con los ejes de coordenadas.
- Halla las coordenadas del punto P que equidista de los puntos A , B y C y es coplanario con ellos.

Solución:

$A(1, -1, 1)$, $B(1, 2, 2)$, $C(2, 1, 1)$

Para encontrar la ecuación del plano que determinan A, B y C necesitamos un punto y dos vectores con direcciones diferentes:

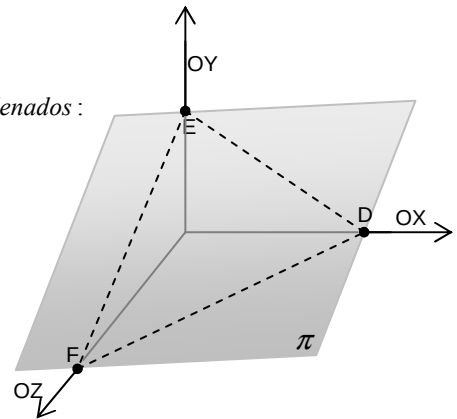
$$\pi \equiv \begin{cases} \text{punto } A(1, -1, 1) \\ \text{vector } \overrightarrow{AB} = (0, 3, 1) \\ \text{vector } \overrightarrow{AC} = (1, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -2x + y - 3z + 6 = 0$$

Vamos a calcular los cortes del plano $\pi \equiv -2x + y - 3z + 6 = 0$ con los ejes coordenados:

$$\text{Eje } OX \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow D = \pi \cap OX \begin{cases} -2x + y - 3z + 6 = 0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow D(3, 0, 0)$$

$$\text{Eje } OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow E = \pi \cap OY \begin{cases} -2x + y - 3z + 6 = 0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow E(0, -6, 0)$$

$$\text{Eje } OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow F = \pi \cap OZ \begin{cases} -2x + y - 3z + 6 = 0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow F(0, 0, 2)$$



$$\text{Área del triángulo } DEF = \frac{|\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DF}|}{2} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DE} = (-3, -6, 0) \\ \overrightarrow{DF} = (-3, 0, 2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DF} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - 18\vec{e}_3$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{(-12)^2 + 6^2 + (-18)^2}}{2} = \frac{6\sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{14} \text{ u}^2$$

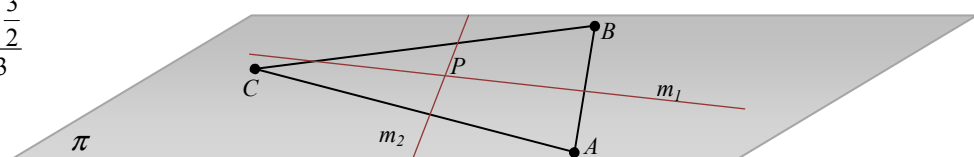
Para calcular P , punto que equidista de A, B, C tenemos más de un camino:

podemos obtener P como el punto de corte de las mediatrices, contenidas en π , de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

$$m_1(\text{mediatriz de } \overline{AB}) \equiv \begin{cases} \text{punto } M_1, \text{ punto medio de } A \text{ y } B \Rightarrow M_1\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ \text{vector } \vec{v} \text{ perpendicular a } \overline{AB} \text{ y al vector normal al plano } \pi, \vec{n} = (-2, 1, -3) \end{cases}$$

$$\vec{v}' = \overline{AB} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{v}' = (-10, -2, 3), \vec{v} = (5, 1, -3) \text{ tiene la misma dirección.}$$

$$m_1 \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} = \frac{z-\frac{3}{2}}{-3}$$



$$m_2(\text{mediatriz de } \overline{AC}) \equiv \begin{cases} \text{punto } M_2, \text{ punto medio de } A \text{ y } C \Rightarrow M_2\left(\frac{3}{2}, 0, 1\right) \\ \text{vector } \vec{u} \text{ perpendicular a } \overline{AC} \text{ y al vector normal al plano } \pi, \vec{\eta} = (-2, 1, -3) \end{cases}$$

$$\vec{u} = \overline{AC} \wedge \vec{\eta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{u} = (-6, 3, 5), \quad m_2 \equiv \frac{x - \frac{3}{2}}{-6} = \frac{y}{3} = \frac{z - 1}{5}$$

Ahora $P = m_1 \cap m_2$; para cortar las rectas podemos ponerlas en paramétricas e igualar:

$$m_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = \frac{1}{2} + \lambda \\ z = \frac{3}{2} - 3\lambda \end{cases}, \quad m_2 \equiv \begin{cases} x = \frac{3}{2} - 6\mu \\ y = 3\mu \\ z = 1 + 5\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 5\lambda = \frac{3}{2} - 6\mu \\ \frac{1}{2} + \lambda = 3\mu \\ \frac{3}{2} - 3\lambda = 1 + 5\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda + 6\mu = \frac{1}{2} \\ \lambda - 3\mu = -\frac{1}{2} \\ 3\lambda + 5\mu = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{de las dos primeras} \\ \text{ecuaciones obtenemos:} \\ \lambda = -\frac{1}{14}, \mu = \frac{2}{14} \end{cases}$$

sustituimos el valor de λ en m_1 o el valor de μ en m_2 y obtenemos las coordenadas de P .

$$\text{Si } \mu = \frac{2}{14} \Rightarrow P\left(\frac{3}{2} - 6 \cdot \frac{2}{14}, 3 \cdot \frac{2}{14}, 1 + 5 \cdot \frac{2}{14}\right) \Rightarrow P\left(\frac{9}{14}, \frac{6}{14}, \frac{24}{14}\right) \Rightarrow P\left(\frac{9}{14}, \frac{3}{7}, \frac{12}{7}\right)$$

Otro camino sería imponer a P que esté contenido en el plano π (poniendo π en paramétricas), calcular los vectores

$$\overline{AP}, \overline{BP} \text{ y } \overline{CP} \text{ y resolver el sistema } \begin{cases} |\overline{AP}| = |\overline{BP}| \\ |\overline{AP}| = |\overline{CP}| \end{cases}$$

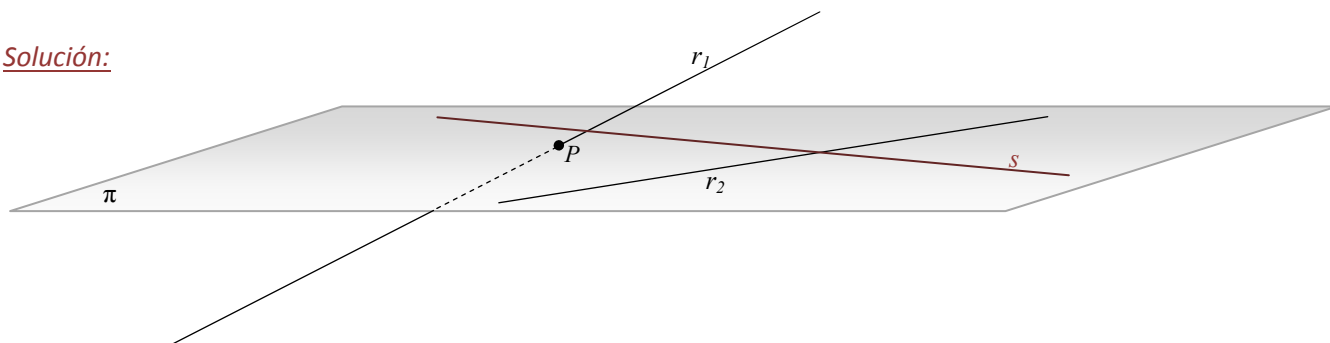
En cualquier caso el punto P será el circuncentro del triángulo ABC .

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Hallar las coordenadas de un punto P que está en la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$, y que determina con la recta

$$r_2 \equiv \begin{cases} 2x + z = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \text{ un plano que contiene a la recta } s \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

Solución:



Calculamos un plano π que contiene a r_2 y a s :

$$\begin{aligned} r_2 \equiv \begin{cases} 2x + z = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} &\Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(0, 0, -2) \text{ es un punto de } r_2 \\ \vec{u} = (1, -1, -2) \text{ es un vector con la dirección de } r_2 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y = z \end{cases} &\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = (0, 1, 1) \text{ es un vector con la dirección de } s \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \pi &\equiv \begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \pi &\equiv x - y + z + 2 = 0 \end{aligned} \right.$$

Ahora P será el punto de intersección entre la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ y+z=-1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x-y+z+2=0$

$$P \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ y+z=-1 \\ x-y+z=-2 \end{cases} \Rightarrow x=-1, y=0, z=-1 \Rightarrow P(-1,0,-1)$$

- P es un punto de r_1 porque es la intersección de la recta y el plano.
- El plano que determina P con r_2 es π .
- La recta s está contenida en el plano π .

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se consideran las rectas $r \equiv \frac{x-4}{2} = y-4 = z$, $s \equiv \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=3 \\ z=1+\lambda \end{cases}$.

- Determinar la posición relativa de las dos rectas.
- Calcular la distancia entre ambas rectas.
- Hallar la ecuación de la perpendicular común a r y s .

Solución:

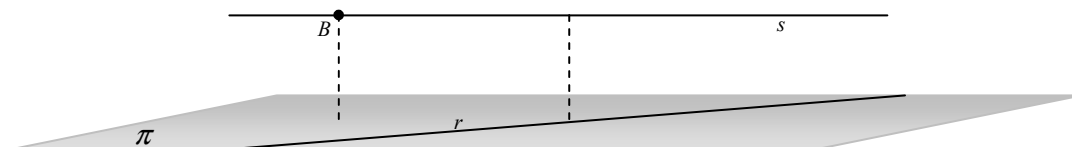
$$r \equiv \frac{x-4}{2} = y-4 = z \Rightarrow \begin{cases} \text{punto de } r, A(4,4,0) \\ \text{vector de } r, \vec{u} = (2,1,1) \end{cases}; \quad s \equiv \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=3 \\ z=1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{punto de } s, B(-2,3,1) \\ \text{vector de } s, \vec{v} = (3,0,1) \end{cases}$$

como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales $\Rightarrow r$ y s no son rectas paralelas.

Si el vector $\overline{AB}$, determinado por los puntos $A \in r$ y $B \in s$, es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, las dos rectas son coplanarias y se cortan en un punto. Pero si $\overline{AB}$ es linealmente independiente con $\vec{u}$ y $\vec{v}$, las rectas están en distinto plano y se cruzan.

$$\overline{AB} = (-6, -1, 1); \quad \begin{vmatrix} -6 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow \overline{AB}, \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son linealmente independientes} \Rightarrow r \text{ y } s \text{ están en distinto plano.}$$

Para calcular la distancia entre r y s , hallamos la ecuación de un plano π que contenga a una de las dos rectas (p. ej. a r) y sea paralelo a la otra (s)



$$\pi \equiv \begin{cases} \text{contiene a la recta } r \Rightarrow \begin{cases} \text{contiene al punto } A(4,4,0) \\ \text{tiene la dirección del vector } \vec{u} = (2,1,1) \end{cases} \\ \text{es paralelo a la recta } s \Rightarrow \text{tiene la dirección del vector } \vec{v} = (3,0,1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv x + y - 3z - 8 = 0$$

Ahora la distancia entre las dos rectas será igual a la distancia entre un punto de $B \in s$ y el plano π

$$d(s, r) = d(B, \pi) = \frac{|1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 8|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{11}} u$$

Para calcular la perpendicular común a las dos rectas vamos a construir

dos planos, π_1 y π_2 , de tal forma que: $\pi_1 \equiv \begin{cases} \text{contiene a la recta } r \\ \text{contiene al vector } \vec{u} \wedge \vec{v} \end{cases}$ y

$\pi_2 \equiv \begin{cases} \text{contiene a la recta } s \\ \text{contiene al vector } \vec{u} \wedge \vec{v} \end{cases}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = (1, 1, -3),$$

como vemos $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{n}$ vector normal al plano π calculado en el apartado anterior.

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} A(4, 4, 0) \\ \vec{u} = (2, 1, 1) \\ \vec{u} \wedge \vec{v} = (1, 1, -3) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv -4x + 7y + z - 12 = 0$$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} B(-2, 3, 1) \\ \vec{v} = (3, 0, 1) \\ \vec{u} \wedge \vec{v} = (1, 1, -3) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv -x + 10y + 3z - 35 = 0$$

Ahora la recta t , perpendicular común a r y s , se obtiene como $t = \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow t \equiv \begin{cases} -4x + 7y + z + 12 = 0 \\ -x + 10y + 3z - 35 = 0 \end{cases}$

