

Problema 1 Sean los puntos $A(1, -1, 0)$, $B(2, 1, 1)$ y $C(1, 3, -1)$ vértices consecutivos de un triángulo, se pide:

1. Calcular un cuarto vértice D de forma que A , B , C y D formen un paralelogramo.
2. Calcular el área de este paralelogramo.
3. Sea otro punto $A'(3, -1, 4)$ y otros B' , C' y D' de forma que con los anteriores formen un paralelepípedo. Calcular su altura.

Solución:

1. Tenemos que $\overrightarrow{BC} = (1, 3, -1) - (2, 1, 1) = (-1, 2, -2)$ y también tenemos que $\overrightarrow{AD} = (x, y, z) - (1, -1, 0) = (x - 1, y + 1, z - 0)$. Como tenemos que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \implies D(0, -1, -2)$.
2. Tenemos que $\overrightarrow{AA'} = (3, -1, 4) - (1, -1, 0) = (2, 0, 4)$ luego

$$V = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \right| = (-6, 1, 4) = \sqrt{36 + 1 + 16} = \sqrt{53}$$

$$V = S \cdot h \implies h = \frac{V}{S} = \frac{2}{\sqrt{53}} = 0,2747u$$

Problema 2 Calcular la altura de un tetraedro definido por los puntos de base $A(1, 2, 1)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(2, 3, 1)$ y un cuarto $D(2, 5, 0)$

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) - (1, 2, 1) = (-2, -1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, 3, 1) - (1, 2, 1) = (1, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AD} = (2, 5, 0) - (1, 2, 1) = (1, 3, -1)$$

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-3| = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = \frac{1}{2} |(1, -1, -1)| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h \implies h = \frac{3V}{S} = \sqrt{3}u$$

Problema 3 Se pide:

1. Dado el plano $3x - y + z - 1 = 0$ encontrar un plano perpendicular a él que contenga a la recta $r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$
2. Dada la recta $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ encontrar un plano perpendicular a ella que contenga al punto $P(-1, -1, 0)$.
3. Dada la recta

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

y el punto $P(2, 2, 3)$ encontrar un plano perpendicular al plano que definen esa recta y ese punto que contenga a la recta $s : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$

Solución:

1.

$$\pi' : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (3, -1, 1) \\ \vec{u}_r = (-1, 1, 2) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} 3 & -1 & x-1 \\ -1 & 1 & y+1 \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0$$

El plano buscado sería $\pi' : 3x + 7y - 2z + 4 = 0$.

2. Como r es perpendicular al plano π buscado, la ecuación de este plano será de la forma $2x + y + 2z + \lambda = 0$, y como este plano tiene que contener al punto $P(-1, -1, 0)$ se tiene que cumplir que

$$2(-1) + (-1) + 2 \cdot 0 + \lambda = 0 \implies \lambda = 3$$

El plano buscado es $\pi : 2x - y + z + 2 = 0$.

3. Primero calculamos el plano

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, -2) \\ \vec{P_rP} = (-1, 0, 2) \\ P_r(1, 2, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 1 & 0 & y-2 \\ -2 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = 2x+4y+z-11 = 0$$

El plano que buscamos vendrá definido por

$$\pi' : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (2, 4, 1) \\ \vec{u}_s = (2, 1, 2) \\ P_s(-1, 1, 0) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} 2 & 2 & x+1 \\ 1 & 4 & y-1 \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$$

El plano buscado es $\pi' : 7x - 2y - 6z + 9 = 0$.