

Problema 1 Estudiar la posición que ocupan los planos siguientes para los diferentes valores que pueda tomar el parámetro m .

$$\begin{cases} (m-1)x + 3y - z - 1 = 0 \\ x + y - (m-1)z + 3 = 0 \\ mx + 2y - mz + 9 = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -m+1 & 3 \\ m & 2 & -m & 9 \end{array} \right)$$

$$|A| = -2m(m-2) = 0 \implies m = 0, m = 2$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso sería un sistema compatible determinado y, por tanto, los tres planos se cortan en un punto.

Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 9 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Como $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 32 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$.

Es decir, $\text{Rango}(\overline{A}) \neq \text{Rango}(A)$ y el sistema es incompatible. Estudiamos ahora la posición de estos planos dos a dos.

$$\pi_1, \pi_2 : \frac{-1}{1} \neq \frac{3}{1} \implies \text{se cortan}$$

$$\pi_1, \pi_3 : \frac{-1}{0} \neq \frac{3}{2} \implies \text{se cortan}$$

$$\pi_2, \pi_3 : \frac{1}{0} \neq \frac{1}{2} \implies \text{se cortan}$$

Los planos se cortan dos a dos en rectas, pero sin puntos comunes a los tres.

Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 9 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Como $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$.

Es decir, $\text{Rango}(\overline{A}) \neq \text{Rango}(A)$ y el sistema es incompatible. Estudiamos ahora la posición de estos planos dos a dos.

$$\pi_1, \pi_2 : \frac{1}{1} \neq \frac{3}{1} \implies \text{se cortan}$$

$$\pi_1, \pi_3 : \frac{1}{2} \neq \frac{3}{2} \implies \text{se cortan}$$

$$\pi_2, \pi_3 : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{9} \implies \text{son paralelos}$$

Los planos π_2 y π_3 son paralelos y el plano π_1 corta a los dos.

Problema 2 Estudiar la posición relativa que ocupan el plano y la recta siguientes:

$$\pi : 3x - y - 5z - 8 = 0, \quad r : \begin{cases} 3x + y - z - 1 = 0 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -5 & -8 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$|A| = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Luego $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 2 < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies$ sistema compatible indeterminado, es decir, la recta y el plano tiene infinitos puntos comunes, la recta está contenida en el plano.