

Problema 1 (6 puntos). Sean el plano $\pi : 2x - y + 3z - 1 = 0$ y la recta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$ se pide:

1. Encontrar una recta s perpendicular a π que pase por el punto $P(3, 0, 1)$.
2. Encontrar una recta t paralela a r que pase por P .
3. Encontrar un plano π' paralelo a π que contenga a P
4. Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π . En el caso de que se corten, calcular el punto de corte y el ángulo que forman.
5. Encontrar un plano π'' perpendicular a π que contenga a r .
6. Encontrar la recta h que es proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π .

Solución:

$$\pi : \vec{u}_\pi = (2, -1, 3), \quad r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}$$

1.

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi = (2, -1, 3) \\ P_s = P(3, 0, 1) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

2.

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_r = (1, -1, 1) \\ P_t = P(3, 0, 1) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

3.

$$\begin{aligned} \pi' : 2x - y + 3z + \lambda = 0 &\implies 6 - 0 + 3 + \lambda = 0 \implies \lambda = -9 \\ \pi' : 2x - y + 3z - 9 = 0 &\implies P \in \pi \end{aligned}$$

4.

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \implies 2(1 + \lambda) - (-\lambda) + 3(-1 + \lambda) - 1 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{3}$$

Luego la recta r y el plano π se cortan en el punto $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

El ángulo que forman será $\beta = 90^\circ - \alpha$ donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}_\pi = (2, -1, 3)$ y $\vec{u}_r = (1, -1, 1)$:

$$\sin \beta = \frac{\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_r}{|\vec{u}_\pi| \cdot |\vec{u}_r|} = \frac{6}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} \Rightarrow \beta = 67^\circ 47' 43''$$

5.

$$\pi'' : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (2, -1, 3) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \pi'' : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ -1 & -1 & y \\ 3 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x+y-z-3=0$$

6.

$$h : \begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Problema 2 (4 puntos). Sean las rectas

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}, \quad s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Se pide:

1. Estudiar la posición relativa de r y s .
2. Calcular la distancia que las separa.
3. Calcular la distancia del punto $P(0, 1, 3)$ a la recta r .
4. La recta s y el punto $H(-1, 1, 2)$ determinan un plano π , calcular la distancia de P a π .

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, 0) \\ P_s(1, 0, 2) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_s P_r} = (1, 1, -2)$$

$$[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

2.

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{8\sqrt{11}}{11} u$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |(-1, -1, 3)| = \sqrt{11}$$

3. $P(0, 1, 3), P_r(2, 1, 0), \overrightarrow{P_r P} = (-2, 0, 3)$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r P} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{77}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{77}{6}} u$$

$$|\overrightarrow{P_r P} \times \overrightarrow{u_r}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = |(-6, 5, -4)| = \sqrt{77}$$

4.

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{P_s H} = (-2, 1, 0) \\ P_s(1, 0, 2) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} -1 & -2 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \implies z-2=0$$

$$P(0, 1, 3) \implies d(P, \pi) = \frac{|3-2|}{\sqrt{1}} = 1 u$$