

Problema 1 (6 puntos). Sean el plano $\pi : x - 2y + 3z - 4 = 0$ y la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$ se pide:

- Encontrar una recta s perpendicular a π que pase por el punto $P(3, 1, 1)$.
- Encontrar una recta t paralela a r que pase por P .
- Encontrar un plano π' paralelo a π que contenga a P .
- Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π . En el caso de que se corten, calcular el punto de corte y el ángulo que forman.
- Encontrar un plano π'' perpendicular a π que contenga a r .
- Encontrar la recta h que es proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π .

Solución:

$$\pi : \vec{u}_\pi = (1, -2, 3), \quad r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}$$

a)

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi = (1, -2, 3) \\ P_s = P(3, 1, 1) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

b)

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_r = (2, -1, 1) \\ P_t = P(3, 1, 1) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned} \pi' : x - 2y + 3z + \lambda = 0 &\implies 3 - 2 + 3 + \lambda = 0 \implies \lambda = -4 \\ \pi' : x - 2y + 3z - 4 = 0 &\implies P \in \pi \end{aligned}$$

d)

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \implies (1+2\lambda) - 2(-\lambda) + 3(-1+\lambda) - 4 = 0 \implies \lambda = \frac{6}{7}$$

Luego la recta r y el plano π se cortan en el punto $\left(\frac{19}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{1}{7}\right)$.

El ángulo que forman será $\beta = 90^\circ - \alpha$ donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}_\pi = (1, -2, 3)$ y $\vec{u}_r = (2, -1, 1)$:

$$\sin \beta = \frac{\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_r}{|\vec{u}_\pi| \cdot |\vec{u}_r|} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} \Rightarrow \beta = 49^\circ 47' 49''$$

e)

$$\pi'' : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (1, -2, 3) \\ \vec{u}_r = (2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \pi'' : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ -2 & -1 & y \\ 3 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+5y+3z+2=0$$

f)

$$h : \begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ x+5y+3z+2=0 \end{cases}$$

Problema 2 (4 puntos). Sean las rectas

$$r : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}, \quad s : \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1 \end{cases}$$

Se pide:

- Estudiar la posición relativa de r y s .
- Calcular la distancia que las separa.
- Calcular la distancia del punto $P(3, -1, 1)$ a la recta r .
- La recta s y el punto $H(2, 1, 1)$ determinan un plano π , calcular la distancia de P a π .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(-2, 1, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, 0) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_s P_r} = (-3, 1, -1)$$

$$[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b)

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u_r}, \vec{u_s}]|}{|\vec{u_r} \times \vec{u_s}|} = \frac{\sqrt{3}}{3} u$$

$$|\vec{u_r} \times \vec{u_s}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = |2(1, 1, -1)| = 2\sqrt{3}$$

c) $P(3, -1, 1), P_r(-2, 1, 0), \overrightarrow{P_r P} = (5, -2, 1)$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u_r}|}{|\vec{u_r}|} = \frac{\sqrt{155}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{155}{6}} u$$

$$|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u_r}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |(-5, -9, 7)| = \sqrt{155}$$

d)

$$\pi : \begin{cases} \vec{u_s} = (1, -1, 0) \\ \overrightarrow{P_s H} = (1, 1, 0) \\ H(2, 1, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-2 \\ -1 & 1 & y-1 \\ 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies z-1=0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|1-1|}{\sqrt{1}} = 0 \implies P \in \pi$$