

Problema 1 Se pide:

1. Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$, y el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$.
2. Encuentra la ecuación general del plano π' perpendicular a π que contenga a r .
3. Calcula la proyección ortogonal de r sobre π .

Solución:

1. $-2\lambda + 3 + 3\lambda = 6 \implies \lambda = 3 \neq 0 \implies$ se cortan en el punto $(-3, 0, 4)$

2.

$$\pi' : \begin{cases} \vec{\pi} = (2, -1, 3) \\ \vec{u}_r = (-1, 0, 1) \\ P_r(0, 0, 1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 3 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x+5y+z-1=0$$

3.

$$t : \begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ x + 5y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Problema 2 Dado el plano $\pi \equiv x + z = 4$ y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

1. Encuentra la ecuación general del plano π' paralelo a π que pasa por P .
2. Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta r perpendicular a π que pasa por P

Solución:

1. $\pi' \equiv x + z + \lambda = 0 \implies 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -1:$

$$\pi \equiv x + z - 1 = 0$$

2.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 0, 1) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 3 Dadas las rectas $s \equiv \frac{x-1}{3} = y = \frac{z-1}{2}$ y $t \equiv \begin{cases} 2x-y=0 \\ 2y-z=4 \end{cases}$, se pide hallar la perpendicular común a s y a t y la distancia que las separa.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_s = (3, 1, 2) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 2, 4) \\ P_t(0, 0, -4) \end{cases}$$

Construimos el vector $\overrightarrow{P_s P_t} = (-1, 0, -5)$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -25 \neq 0 \implies \text{se cruzan}$$

$$d(s, t) = \frac{|[\overrightarrow{P_s P_t}, \vec{u}_s, \vec{u}_t]|}{|\vec{u}_s \times \vec{u}_t|} = 5\sqrt{5} \, u$$

$$\vec{u}_r = \vec{u}_s \times \vec{u}_t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (0, -2, 1)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (0, -2, 1) \\ \vec{u}_s = (3, 1, 2) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 3 & x-1 \\ -2 & 1 & y \\ 1 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 5x-3y-6z+1=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_r = (0, -2, 1) \\ \vec{u}_t = (1, 2, 4) \\ P_t(0, 0, -4) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & -1 & x \\ -2 & 2 & y \\ 1 & 4 & z+4 \end{vmatrix} = 0 \implies 10x+y+2z+8=0$$

$$r : \begin{cases} 5x-3y-6z+1=0 \\ 10x+y+2z+8=0 \end{cases}$$

Problema 4 Se consideran las rectas r y s dadas por las ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}, \quad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{a}$$

1. Hallar el valor del parámetro a para que r y s sean perpendiculares.
2. Hallar la recta t paralela a r y que pasa por el punto de s cuya coordenada z es 0.

Solución