

Problema 1 Dadas las rectas

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}, \quad s : \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

Se pide determinar una recta t que corte a ambas y pase por el punto $P(1, -1, 2)$.

Solución:

t se obtiene como la intersección de dos planos π_1 y π_2 .

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 3) \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-2, -1, 3) \\ P_s(0, -2, -1) \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 0, -1) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 0, -1) \\ \vec{P}_r \vec{P} = (0, 2, -2) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 0 & 2 & y-1 \\ -1 & -2 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (-2, -1, 3) \\ \vec{P}_s \vec{P} = (1, 1, 3) \\ P_s(0, -2, -1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} -2 & 1 & x \\ -1 & 1 & y+2 \\ 3 & 3 & z+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$t : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 6x - 9y + z + 17 = 0 \end{cases}$$

Problema 2 Dado el punto $P(1, -1, 2)$ y la recta $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, se pide calcular el punto simétrico de P respecto de r y la distancia de P a r .

Solución:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 2) \end{cases} \implies -x + y + z + \lambda = 0 \implies -1 - 1 + 2 + \lambda = 0 \implies \lambda = 0$$

$$\pi : x - y - z = 0$$

La recta r y el plano π se cortan en un punto P'

$$1 - \lambda - \lambda - (2 + \lambda) = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{cases} \implies P' \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

El punto simétrico que buscamos P'' tiene que cumplir

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

La distancia del punto P a la recta r la podemos calcular de dos maneras

•

$$d(P, r) = d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \left| \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right) \right| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

•

$$\overrightarrow{P_r P} = (0, -1, 0), \quad |\overrightarrow{P_r P} \times \overrightarrow{u_r}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(-1, 0, -1)| = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{3} \implies d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r P} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$