

Problema 1 (8 puntos). Dados la recta $r : \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi : x + y + z - 2 = 0$ se pide:

1. Un plano perpendicular a π que contenga a r
2. Una recta perpendicular a π que pase por el origen de coordenadas.
3. Ángulo que forman r y π .
4. Ángulo que forma π con $\pi' : 2x - y + 3z - 1 = 0$
5. Distancia del punto $P(3, -1, 5)$ a la recta r .
6. Los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas y el volumen del tetraedro que forma con estos puntos y el origen de coordenadas.
7. La altura sobre la base formada con los tres puntos de corte calculados en el apartado anterior.
8. Encontrar un plano paralelo a π que esté a una distancia de 5 unidades de él.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 2, 1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases} \quad \vec{u}_\pi = (1, 1, 1)$$

1.

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (1, 1, 1) \\ \vec{u}_r = (-1, 2, 1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x+1 \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x+2y-3z+4=0$$

2.

$$t : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (1, 1, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

3. $\vec{u}_\pi = (1, 1, 1)$ y $\vec{u}_r = (-1, 2, 1)$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3\sqrt{2}} \implies \alpha = 28^\circ 7' 32''$$

4. $\vec{u}_\pi = (1, 1, 1)$ y $\vec{u}_{\pi'} = (2, -1, 3)$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{14}} \implies \alpha = 51^\circ 53' 13''$$

5. $\overrightarrow{P_r P} = (4, -1, 4)$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \sqrt{\frac{97}{3}} u$$

$$|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u}_r| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(-9, -8, 7)| = \sqrt{194}$$

6. Con OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \implies A(2, 0, 0) \implies \overrightarrow{OA} = (2, 0, 0)$

Con OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \implies B(0, 2, 0) \implies \overrightarrow{OB} = (0, 2, 0)$

Con OZ hacemos $x = 0$ y $y = 0 \implies C(0, 0, 2) \implies \overrightarrow{OC} = (0, 0, 2)$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{4}{3} u$$

7.

$$d(O, \pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} u$$

8.

$$d(P, \pi) = \frac{|x + y + z - 2|}{\sqrt{3}} = 5$$

$$x + y + z - 2 = 5\sqrt{3} \implies x + y + z - 2 - 5\sqrt{3} = 0$$

$$x + y + z - 2 = -5\sqrt{3} \implies x + y + z - 2 + 5\sqrt{3} = 0$$

Problema 2 (2 puntos). Se pide:

- ¿Son coplanarios los puntos $A(3, -1, 5)$, $B(2, 2, 5)$, $C(3, 1, -2)$ y $D(5, 1, 3)$?
- Calcular λ para que los vectores $\vec{u} = (\lambda - 1, \lambda, 3)$, $\vec{v} = (\lambda - 1, -1, 2)$ y $\vec{w} = (-1, 2\lambda, -1)$ sean linealmente dependientes.

Solución:

1. $\overrightarrow{AB} = (-1, 3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 2, -7)$ y $\overrightarrow{AD} = (2, 2, -2)$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -7 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -52 \neq 0$$

Los puntos no son coplanarios

- 2.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & \lambda & 0 \\ \lambda - 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2\lambda & -1 \end{vmatrix} = 3\lambda - 4\lambda - 4 = 0 \implies \lambda = 2, \lambda = -\frac{2}{3}$$

Si $\lambda = 2$ o $\lambda = -2/3$ los vectores son linealmente dependientes.

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2/3$ los vectores son linealmente independientes.