

Problema 1 (5 puntos). Sea el punto $P(-1, 3, -1)$, el plano $\pi : 2x - y + z + 2 = 0$ y la recta

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$$

se pide:

1. (2,5 puntos). Calcular el punto simétrico de P respecto de π .
2. (2,5 puntos). Calcular el punto simétrico de P con respecto de r .

Solución:

1. Se sigue el siguiente procedimiento:

- Se calcula una recta t perpendicular a π que pase por el punto P :

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (2, -1, 1) \\ P_t(-1, 3, -1) \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

- Se encuentra el punto de corte P' de la recta t con el plano π :

$$2(-1 + 2\lambda) - (3 - \lambda) + (-1 + \lambda) + 2 = 0 \implies \lambda = \frac{2}{3}$$

luego el punto $P' \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3} \right)$.

- Tenemos:

$$\frac{P + P''}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = \left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{2}{3} \right) - (-1, 3, -1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

2. Se sigue el siguiente procedimiento:

- Se calcula un plano π perpendicular a r que contenga al punto P :

$$x + y + 5z + \lambda = 0 \implies -1 + 3 - 5 + \lambda = 0 \implies \lambda = 3$$

El plano es $\pi : x + y + 5z + 3 = 0$

- Calculamos el punto de corte entre π y r :

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 5\lambda \end{cases} \implies (-1 + \lambda) + (\lambda) + 5(1 + 5\lambda) + 3 = 0 \implies \lambda = -\frac{7}{27}$$

luego el punto $P' \left(-\frac{34}{27}, -\frac{7}{27}, -\frac{8}{27} \right)$.

- Tenemos:

$$\frac{P + P''}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = \left(-\frac{64}{27}, -\frac{14}{27}, -\frac{16}{27}\right) - (-1, 3, -1) = \left(-\frac{37}{27}, -\frac{95}{27}, \frac{11}{27}\right)$$

Problema 2 (3 puntos). Sea el plano $\pi : 2x + 3y - 2z - 6 = 0$. Este plano corta a los ejes coordenados en tres puntos formando un tetraedro con el origen. Se pide:

1. (1 punto). Los puntos de corte de π con los ejes coordenados.
2. (1 punto). Volumen del tetraedro.
3. (1 punto). Altura del tetraedro sobre la base formada por los tres puntos calculados en el primer apartado.

Solución:

1. Corte con el eje OX : Hacemos $y = 0$ y $z = 0 \implies A(3, 0, 0)$

Corte con el eje OY : Hacemos $x = 0$ y $z = 0 \implies B(0, 2, 0)$

Corte con el eje OZ : Hacemos $x = 0$ y $y = 0 \implies C(0, 0, -3)$

Tendremos los vectores con el origen de coordenadas:

$$\overrightarrow{OA} = (3, 0, 0), \quad \overrightarrow{OB} = (0, 2, 0), \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, -3)$$

2. El volumen será:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-18| = 3 \text{ u}^3$$

- 3.

$$\text{altura} = d(O, \pi) = \frac{|-6|}{\sqrt{17}} = \frac{6}{\sqrt{17}} \text{ u}$$

Problema 3 (2 puntos). Dados el punto $P(1, -2, 1)$ y la recta

$$r : \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$

se pide:

1. (1 punto). Calcular la distancia de P a r .
2. (1 punto). Calcular una recta paralela a r contenga a P .

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 2) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P} = (2, -2, 2)$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{12} \, u$$

$$|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u}_r| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \right| = |(6, 6, 0)| = 6\sqrt{2}$$

2.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 2) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{cases} \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, 2) \\ P_s(1, -2, 1) \end{cases}$$

La recta buscada será:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$$