

Problema 1 (4 puntos). Dada la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 1 = 0$, se pide:

1. Comprobar que se trata de una esfera, calculando su centro y su radio.
2. Encontrar el corte de esta esfera con un plano horizontal de ecuación $z = 1$.
3. Encontrar la ecuación de un plano tangente a la esfera en el punto $P(3, 2, 2)$.

Solución:

1.

$$m = -2a = -4 \implies a = 2; \quad n = -2b = -2 \implies b = 1; \quad p = -2c = 0 \implies c = 0$$

$$q = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 \implies 1 = 4 + 1 - r^2 \implies r = 2$$

Se trata de una esfera de centro $C(2, 1, 0)$ y radio $r = 2$.

2. Cuando $z = 1 \implies x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$:

$$m = -2a = -4 \implies a = 2; \quad n = -2b = -2 \implies b = 1$$

$$p = a^2 + b^2 - r^2 \implies 2 = 4 + 1 - r^2 \implies r = \sqrt{3}$$

Se trata de una circunferencia de centro $C(2, 1, 1)$ y radio $r = \sqrt{3}$.

3. $\overrightarrow{CP} \perp \pi \implies \overrightarrow{u}_\pi = (1, 1, 2)$ y contiene el punto $P(3, 2, 2)$:

$$\pi : x + y + 2z + \lambda = 0 \implies \lambda = -9 \implies \pi : x + y + 2z - 9 = 0$$

Problema 2 (2 puntos). Encontrar los puntos de la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

que se encuentran a una distancia 5 del punto $P(1, 1, 1)$

Solución:

Construimos una esfera de centro P y radio $r = 5$:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$$

Calculamos los puntos de corte de esta circunferencia y la recta

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$(1 + 2\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1)^2 = 25 \implies 6\lambda^2 - 4\lambda - 23 = 0 \implies$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2, 32 \implies P_1(5, 64; 2, 32; 2, 32) \\ \lambda_2 = -1, 65 \implies P_2(-2, 3; -1, 65; -1, 65) \end{cases}$$

Problema 3 (4 puntos). Se consideran las rectas

$$r : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1} \quad s : \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

se pide:

1. Estudiar su posición relativa.
2. Calcular la distancia que las separa.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ P_r(-2, 1, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, 1) \\ P_s(2, 0, 1) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (4, -1, 1)$$

1.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Rango}(A) = 2 \text{ y } \text{Rango}\left(\begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_r \end{pmatrix}\right) = 1 \longrightarrow r \text{ y } s \text{ son paralelas.}$$

2.

$$d(r, s) = d(P_s, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{3\sqrt{11}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{66}}{2} u$$

$$|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{u}_r| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(-3, -3, 9)| = 3\sqrt{11}$$