

Problema 1 (2 puntos). Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$, se pide:

1. (0,5 puntos). Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
2. (1 punto). Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A , B y C .
3. (0,5 puntos). Hallar la distancia del punto D al plano π .

Solución:

1. Construimos los vectores:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, -3) \\ \overrightarrow{AD} = (1, 2, -1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \implies$$

Los cuatro puntos no son coplanarios.

- 2.

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, -3) \\ A(0, 0, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -2 & -3 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

- 3.

$$d(D, \pi) = \frac{|2 + 6 - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Madrid (Junio 2008)

Problema 2 (2 puntos). Dados el plano $\pi : 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1, 2, 3)$, se pide:

1. (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P .
2. (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π con r .
3. (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY .
4. (0,5 puntos). Hallar el área del triángulo PQR

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 2, -1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

2.

$$3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (3 - \lambda) + 10 = 0 \implies \lambda = -1$$

Luego el punto buscado es el $Q(-2, 0, 4)$ (Sustituyendo el valor de λ en la recta r).

3. Cuando el plano π corta al eje OY tendremos que $x = 0$ y $z = 0$, luego $2y + 10 = 0 \implies y = -5$. El punto buscado es $R(0, -5, 0)$.

4. Construyo los vectores $\vec{RQ} = (-2, 5, 4)$ y $\vec{RP} = (1, 7, 3)$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{RQ} \times \vec{RP}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-13, 10, -19)| = \frac{3\sqrt{70}}{2}$$

Madrid (Junio 2008)

Problema 3 (2 puntos). Se pide:

1. (1 punto). Calcular la distancia entre la recta $r_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$ y la recta r_2 determinada por el punto $P_2(1, -1, 3)$ y el vector director $\vec{v} = (1, 0, 3)$

2. (1 punto). Calcule el punto del plano $2x + y - z = 1$ más cercano al punto $(1, 2, -3)$.

Solución:

1.

$$r_1 : \begin{cases} \vec{u}_{r_1} = (1, 1, 1) \\ P_{r_1}(-1, 0, 3) \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} \vec{u}_{r_2} = (1, 0, 3) \\ P_{r_2}(1, -1, 3) \end{cases} \quad \vec{P_{r_1}P_{r_2}} = (2, -1, 0)$$

$$|\vec{u}_{r_1} \times \vec{u}_{r_2}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = |(3, -2, -1)| = \sqrt{14}$$

$$[\vec{u}_{r_1}, \vec{u}_{r_2}, \vec{P_{r_1}P_{r_2}}] = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right| = 8$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_{r_1}, \vec{u}_{r_2}, \vec{P_{r_1}P_{r_2}}]|}{|\vec{u}_{r_1} \times \vec{u}_{r_2}|} = \frac{8}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{7} u$$

2.

3. Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta t perpendicular a π que pase por P :

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (2, 1, -1) \\ P_t(1, 2, -3) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ y = -3 - \lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto P' de corte de t con π :

$$2(1+2\lambda) + (2+\lambda) - (-3-\lambda) - 1 = 0 \implies \lambda = -1 \implies P'(-1, 1, -2)$$

Murcia (Junio 2008)

Problema 4 (3 puntos). Se considera la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4}$ y el plano $\pi : 2x + 4y + 4z = 5$

1. (1,5 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π .
2. (1,5 puntos) Calcular la ecuación de un plano π_1 , que es perpendicular a π y contiene a r .

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 - 5\lambda \\ z = -3 + 4\lambda \end{cases} \implies 2(1+2\lambda) + 4(-5-5\lambda) + 4(-3+4\lambda) = 5 \implies 0 = 35$$

Como este resultado es absurdo la recta y el plano no se cortan nunca, es decir, son paralelos.

2.

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (2, 4, 4) \\ \vec{u}_r = (2, -5, 4) \\ P_r(1, -5, -3) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 2 & 2 & x-1 \\ 4 & -5 & y+5 \\ 4 & 4 & z+3 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_2 : 2x - z - 5 = 0$$

Zaragoza (Junio 2008)

Problema 5 (3 puntos). Se pide:

1. (1 punto). Calcular la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\pi : x + y + z = 3$. Obtener el punto de corte de la recta con el plano π .

2. (2 puntos). Hallar el punto (o los) de la recta $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ cuya distancia al punto $P(1, 0, 2)$ sea $\sqrt{5}$.

Solución:

1. (1 punto). Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta t perpendicular a π que pase por O :

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 1, 1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto P' de corte de t con π :

$$\lambda + \lambda + \lambda - 3 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P'(1, 1, 1)$$

2. (2 puntos). Construimos una esfera de centro $P(1, 0, 2)$ y radio $\sqrt{5}$:

$$(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5 \implies (\lambda-1)^2 + (3-\lambda)^2 + (-1+2\lambda)^2 = 5 \implies \lambda = 1 \implies$$

El punto buscado es $(1, 2, 3)$. La esfera que construimos y la recta sólo tienen un punto de corte y, por tanto, tangentes.

Zaragoza (Junio 2008)