

Problema 1 Dadas las retas:

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad s : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

Se pide:

1. Estudiar la posición que ocupan.
2. Calcular la distancia mínima que las separa, si procede.
3. Encontrar una recta que las corte y sea perpendicular a ambas.
4. Si $O(0,0,0)$ encontrar una recta que pasando por O corte a las dos rectas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 0) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, 1) \\ P_s(-1, 1, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (-2, 1, 1)$$

1.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{se cruzan}$$

2.

$$|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}]| = 4; \quad |\vec{u}_t| = |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(1, 1, -3)| = \sqrt{11}$$

$$d = \frac{4}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{11}}{11} u$$

3. $\vec{u}_t = (1, 1, -3)$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t \\ \vec{u}_r \\ P_r \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ -3 & 0 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies 3x + 3y + 2z - 1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t \\ \vec{u}_s \\ P_s \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ 1 & 1 & y-1 \\ -3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 4x - 7y - z + 11 = 0$$

$$t : \begin{cases} 3x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ 4x - 7y - z + 11 = 0 \end{cases}$$

4. Tenemos $O(0, 0, 0)$, $\overrightarrow{OP_r} = (1, 0, -1)$ y $\overrightarrow{OP_s} = (-1, 1, 0)$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{OP_r} \\ \overrightarrow{u_r} \\ O \end{cases} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{OP_s} \\ \overrightarrow{u_s} \\ O \end{cases} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - 3z = 0$$

$$h : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -m & 2 \\ 2 & 2 & m \\ 3 & m & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -m & 2 \\ 2 & 2 & m \\ 3 & m & 3 \end{vmatrix} = -4m^2 + 10m - 6 = 0 \Rightarrow m = 1, \quad m = \frac{3}{2}$$

Si $m = 1$ o $m = \frac{3}{2} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ no existe A^{-1} .

Si $m \neq 1$ y $m \neq \frac{3}{2} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ existe A^{-1} .

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2/3 \\ 1 & 1/2 & -2/3 \\ 1 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Discute, en función de los valores de a , y resuelve, en los casos en los que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y - az = 1 \\ -3x + 2y + 4z = a \\ -x + ay + z = 0 \end{cases}$$

(La Rioja (junio 2007))

Solución

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -a & 1 \\ -3 & 2 & 4 & a \\ -1 & a & 1 & 0 \end{array} \right), \quad |A| = 3a^2 - 6a + 3 = 0 \implies a = 1$$

Si $a \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema Compatible Determinado}$.

Los tres planos se cortan en un punto.

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ a & -2 & 4 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{3(a-1)^2} = \frac{-a^3 - 3a + 2}{3(a-1)^2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ -3 & a & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{3(a-1)^2} = \frac{-a^2 + a - 1}{3(a-1)^2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & a \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix}}{3(a-1)^2} = \frac{-a^2 - 2a + 2}{3(a-1)^2}$$

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \implies \text{Sistema Incompatible}$ (No tiene solución). En este caso son dos planos paralelos (π_1 y π_3 mientras que π_2 corta a ambos).