

Problema 1 (5 puntos). Sean las rectas

$$r : \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 \end{cases},$$

se pide:

- Estudiar la posición de ambas rectas.
- La distancia que las separa.
- Encontrar una recta vertical a ambas que pase por el punto $P(1, 1, -1)$
- Encontrar una recta vertical a ambas y que las corte.
- Encontrar una recta que pasando por el punto $P(1, 1, -1)$ corte a ambas.
- Encontrar los puntos de r que distan 5 unidades de P .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 3) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 2, 0) \\ P_s(1, 0, 3) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (0, 0, 4)$$

a)

$$[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \implies \text{se cruzan}$$

b)

$$|\vec{u}_t| = |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right| = |-3(2, 1, -1)| = 3\sqrt{6}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{12}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} u$$

c)

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (2, 1, -1) \\ P(1, 1, -1) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

d)

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (2, 1, -1) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 3) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 3 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies 4x - 7y + z - 3 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (2, 1, -1) \\ \vec{u}_s = (-1, 2, 0) \\ P_s(1, 0, 3) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y \\ -1 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \implies 2x + y + 5z + 17 = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x - 7y + z - 3 = 0 \\ 2x + y + 5z + 17 = 0 \end{cases}$$

e)

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{P_r P} = (0, 1, 0) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 3) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 3 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies 3x - z - 4 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{P_s P} = (0, 1, -4) \\ \vec{u}_s = (-1, 2, 0) \\ P_s(1, 0, 3) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y \\ -4 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \implies 8x - 4y - z - 5 = 0$$

$$l : \begin{cases} 3x - z - 4 = 0 \\ 8x - 4y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

f)

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}, \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 25$$

$$(\lambda)^2 + (\lambda-1)^2 + (3\lambda)^2 = 25 \implies 11\lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0 \implies$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1, 39 \implies P_1(-0, 39; -1, 39; -5, 17) \\ \lambda_2 = 1, 57 \implies P_2(2, 57; 1, 57; 3, 71) \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos). Se pide:

a) Dados los puntos $P_1(1, -1, 5)$ y $P_2(3, 1, 3)$ encontrar el plano mediador.

b) Dados los planos $\pi_1 : x + 2y - 3z + 1 = 0$ y $\pi_2 : 3x - 2y - z + 2 = 0$ encontrar los planos bisectores.

Solución:

a)

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} \implies$$

$$\pi : x + y - z + 2 = 0$$

b)

$$\frac{|x + 2y - 3z + 1|}{\sqrt{14}} = \frac{|3x - 2y - z + 2|}{\sqrt{14}} \implies \begin{cases} \pi : 2x - 4y + 2z + 1 = 0 \\ \pi' : 4x - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

Problema 3 (3 puntos). Dada la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 6z + 2 = 0$ se pide:

- Calcular su centro y radio.
- Encontrar la ecuación de la figura geométrica resultante de cortar esta esfera con el plano $z = 2$.
- Calcular la ecuación del plano tangente a esta esfera en el punto $P(4, 1, 1)$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} m = -2a = -2 \implies a = 1 \\ n = -2b = -6 \implies b = 3 \\ p = -2c = 6 \implies c = 3 \\ 2 = 1 + 9 + 9 - r^2 \end{cases} \implies C(1, 3, 3), \quad r = \sqrt{17}$$

- b) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ Se trata de un disco circular paralelo al plano $z = 0$ de centro en el punto $C'(1, 3, 2)$ y radio: $-6 = 1 + 9 - r'^2 \implies r' = \sqrt{16} = 4$

c)

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_\pi = \overrightarrow{CP} = (3, -2, -2) \\ P(4, 1, 1) \end{cases} \implies 3x - 2y - 2z + \lambda = 0 \implies 12 - 2 - 2 + \lambda = 0 \implies$$

$$\lambda = -8 \implies \pi : 3x - 2y - 2z - 8 = 0$$