

Problema 1 (5 puntos). Sean las rectas

$$r : \begin{cases} x - 2y + 2z = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases},$$

se pide:

1. Estudiar la posición de ambas rectas.
2. La distancia que las separa.
3. Encontrar una recta vertical a ambas y que las corte.
4. Encontrar una recta que pasando por el punto $P(-1, 3, 0)$ corte a ambas.
5. Encontrar los puntos de r que distan 5 unidades de P .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, 2) \\ P_r(0, -2, -1) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 0, 1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (1, 4, 1)$$

1.

$$[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \implies \text{se cruzan}$$

2.

$$|\vec{u}_t| = |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |(3, -4, 3)| = \sqrt{34}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{10}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{17} u$$

3.

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (3, -4, 3) \\ \vec{u}_r = (2, 3, 2) \\ P_r(0, -2, -1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & 2 & x \\ -4 & 3 & y+2 \\ 3 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies x - z - 1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (3, -4, 3) \\ \vec{u}_s = (-1, 0, 1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 3 & -1 & x-1 \\ -4 & 0 & y-2 \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 2x + 3y + 2z - 8 = 0$$

$$t : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

4.

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = (1, -5, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 2) \\ P_r(0, -2, -1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -5 & 3 & y+2 \\ -1 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies 7x+4y-13z-5=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = (2, -1, 0) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 0, 1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-2 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x+2y+z-5=0$$

$$l : \begin{cases} 7x + 4y - 13z - 5 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

5.

$$r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}, \quad (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 25$$

$$(2\lambda+1)^2 + (3\lambda-5)^2 + (2\lambda-1)^2 = 25 \implies 17\lambda^2 - 30\lambda + 2 = 0 \implies$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1, 7 \implies P_1(3, 4; 3, 1; 2, 4) \\ \lambda_2 = 0, 07 \implies P_2(0, 14; -1, 79; -0, 86) \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos). Se pide:

1. Dados los puntos $P_1(-1, 2, 0)$ y $P_2(3, 5, 1)$ encontrar el plano mediador.
2. Dados los planos $\pi_1 : x - 3y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 : 3x - y - z + 2 = 0$ encontrar los planos bisectores.

Solución:

1.

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2} \implies$$

$$\pi : 4x + 3y + z - 15 = 0$$

2.

$$\frac{|x - 3y + z + 2|}{\sqrt{11}} = \frac{|3x - y - z + 2|}{\sqrt{11}} \implies \begin{cases} \pi : x + y - z + 2 = 0 \\ \pi' : x - y = 0 \end{cases}$$

Problema 3 (3 puntos). Dada la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z - 6 = 0$ se pide:

1. Calcular su centro y radio.
2. Encontrar la ecuación de la figura geométrica resultante de cortar esta esfera con el plano $z = 2$.
3. Calcular la ecuación del plano tangente a esta esfera en el punto $P(3, 2, 1)$.

Solución:

1.

$$\begin{cases} m = -2a = -4 \implies a = 2 \\ n = -2b = -2 \implies b = 1 \\ p = -2c = -4 \implies c = 2 \\ -6 = 4 + 1 + 4 - r^2 \end{cases} \implies C(2, 1, 2), \quad r = \sqrt{15}$$

2. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 10 = 0$ Se trata de un disco circular paralelo al plano $z = 0$ de centro en el punto $C'(2, 1, 1)$ y radio: $-10 = 4 + 1 - r'^2 \implies r' = \sqrt{15}$

3.

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_\pi = \overrightarrow{CP} = (1, 1, -1) \\ P(3, 2, 1) \end{cases} \implies x + y - z + \lambda = 0 \implies 3 + 2 - 1 + \lambda = 0 \implies$$

$$\lambda = -4 \implies \pi : x + y - z - 4 = 0$$