

Problema 1 (2,5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Hallar A^n para todo entero positivo n .
2. Calcular, si existe, la inversa de la matriz A y la de la matriz $I_3 + A$.

Solución:

1. Calculamos las potencias de A :

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots$$

Es decir:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n = 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

- 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir, para cualquier valor de a se cumple que $|A| = 0$, y por tanto A no tiene inversa. Por otro lado:

$$|A + I_3| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A + I_3| = 1$$

Es decir, para cualquier valor de a se cumple que $|A + I_3| \neq 0$, y por tanto tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2,5 puntos) Sean r la recta determinada por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(1, -1, -1)$ y s la recta de ecuaciones: $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$. Se pide:

1. Su posición relativa.
2. Hallar, si existe, una recta que pase por el punto $C = (1, 2, 4)$ y que corte a las rectas r y s .

Solución:

1. La recta r pasa por los puntos A y B , para construirla calculamos el vector director de ella $\vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (0, -1, 0)$
Vamos a escribir las dos rectas en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t \\ z = -1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Los vectores directores de ambas rectas no son paralelos, $\vec{u}_r = (0, -1, 0)$ y $\vec{u}_s = (2, 5, 3)$. Lo que quiere decir que, o bien se cortan o bien se cruzan. Vamos a resolverlo mediante un sistema:

$$\left. \begin{array}{ll} 3 + 2\lambda = 1 & (1) \\ 5\lambda = -1 - t & (2) \\ 3\lambda = -1 & (3) \end{array} \right\} \text{Despejando } \lambda \text{ de (1) y (3) tenemos:}$$

$$\text{De (1)} \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\text{De (3)} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

Como los dos valores de λ son diferentes, concluimos con que las dos rectas se cruzan.

2. Si construimos el plano π_1 determinado por la recta r y el punto C , y construimos el plano π_2 determinado por la recta s y el punto C . Por tanto, la recta pedida sería la intersección de estos dos planos.

- Calculamos π_1 :

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_1 = \overrightarrow{AB} = (0, -1, 0) \\ \vec{u}_2 = \overrightarrow{AC} = (0, 2, 5) \\ A(1, 0, -1) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 \\ -1 & 2 & y \\ 0 & 5 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies -5(x-1) = 0 \implies \pi_1 : x-1 = 0$$

- Calculamos π_2 :

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{u}_s = (2, 5, 3) \\ \vec{u}_2 = \overrightarrow{PC} = (-2, 2, 4) \\ P(3, 0, 0) \end{cases}$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -2 & x-3 \\ 5 & 2 & y \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_2 : x - y + z - 3 = 0$$

Ahora resolvemos el sistema formado por ambos planos, para comprobar que se trata de una recta:

$$\begin{cases} x-1=0 \\ x-y+z-3=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=1 \\ y=x+z-3 \end{cases} \implies \begin{cases} x=1 \\ y=-2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Que sería la recta que nos piden.

Problema 3 (2,5 puntos) Hallar todas las funciones f cuya derivada es:

$$f'(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$$

indicando el dominio de definición de éstas.

Solución:

- Tenemos que calcular las primitivas de $f'(x)$, como el polinomio del numerador es de mayor grado que el del denominador, primero dividimos los dos polinomios:

$$\begin{array}{r} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 1 \\ -x^4 - x^3 \\ \hline -x^3 + 0x^2 + x + 1 \\ +x^3 + x^2 \\ \hline x^2 + x + 1 \\ -x^2 - x \\ \hline 1 \end{array} \quad \frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1}$$

Tenemos, por tanto, que calcular la siguiente integral:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x} dx &= \int \left(x^2 - x + 1 + \frac{1}{x^2 + x} \right) dx = \int (x^2 - x + 1) dx + \int \frac{dx}{x^2 + x} \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dx}{x(x+1)}\end{aligned}$$

Tendremos que calcular esta última integral, lo haremos por descomposición polinómica:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)} \implies \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Luego tendremos:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x} dx &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln(x) - \ln(x+1) + C \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + C\end{aligned}$$

- Ahora calculamos el dominio de estas funciones:

Como tenemos un logaritmo neperiano podremos decir que el dominio D de esta función sería: $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } \frac{x}{x+1} > 0 \text{ y } x \neq -1\}$

Para hallar esta región tenemos que estudiar el signo de $\frac{x}{x+1}$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
<i>signo</i> x	−	−	+
<i>signo</i> $(x + 1)$	−	+	+
<i>signo</i> $\frac{x}{x+1}$	+	−	+

En conclusión, tendremos que el dominio será:

$$\boxed{D = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)}$$

Problema 4 (2,5 puntos) Responda a las siguientes cuestiones referidas a la curva

$$y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$$

Se pide:

1. Dominio de definición.
2. Simetría.
3. Cortes a los ejes.
4. Asíntotas.
5. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Máximos y mínimos.
7. Representación aproximada.

Solución:

1. El dominio será toda la recta real, excepto en aquellos puntos el los que se anula el denominador, dicho de otra manera será $D = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
2. $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 3}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = f(x)$
Luego la función es par, y por tanto simétrica respecto al eje Y .
3. Con el eje X hacemos $y = 0$ y nos queda:
 $0 = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} \implies x^2 + 3 = 0 \implies$ no hay puntos de corte con el eje X .
Con el eje Y hacemos $x = 0$ y nos queda:
 $f(0) = \frac{0+3}{0-4} = -\frac{3}{4} \implies$ la función corta al eje Y en el punto $(0, -\frac{3}{4})$.
4. Asíntotas:
 - Verticales:
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \infty \implies x = 2$ es una asíntota vertical
 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \infty \implies x = -2$ es una asíntota vertical
 - Horizontales:
 $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 1 \implies y = 1$ es una asíntota horizontal.
 - Oblicuas:
 $y = ax + b$ es una asíntota oblicua, entonces $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} =$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x(x^2 - 4)} = 0 \implies$ no hay asíntotas oblicuas.
5. Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento calcularemos la primera derivada:

$$y' = -\frac{14x}{(x^2 - 4)^2}$$

Para que exista un punto crítico imponemos que $y' = 0$ y nos queda:

$$\frac{14x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \implies 14x = 0 \implies x = 0$$

Analizamos el signo de y' :

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
signo y'	+	+	−	−
y	creciente	creciente	decreciente	decreciente

En resumen:

- La función crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
 - La función decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$
6. Observamos que en el punto de abscisa $x = 0$ la curva pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, en el punto $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ tiene un máximo.
7. Representación gráfica:

