APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS

10.1 DERIVADAS SUCESIVAS

Antes de introducirnos en algunas importantes aplicaciones de las derivadas, vamos a ver una ampliación de los puntos estudiados en el tema anterior que nos serán útiles en éste.

Dado que, como hemos visto, la derivada de una función es también una función, podemos definir la derivada segunda como la derivada de la función derivada, es decir:

$$f''(x) = \left[f'(x) \right]'$$

en la que hemos representado por $f''(x)$ la segunda derivada

Ejemplo 1.- Calcular la segunda derivada de la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$, sería la primera derivada o, simplemente la derivada

y la segunda derivada será: $f''(x) = 6x - 10$, que obtenemos derivando la primera derivada.

De la misma forma podemos calcular la derivada tercera , cuarta, ..., n-ésima, que representamos en la forma $f'''(x),$ y en general $f^{(n)}(x)$ representa la derivada n-ésima

Ejemplo 2.-Calcular $f^{(n)}(x)$, para la función $f(x) = e^{px}$, siendo *p* cualquier número natural. Determina después la derivada quinta cuando *p = 3*

Para determinar la derivada n-ésima, vamos calculando las derivadas sucesivas y observamos cuál es la ley de formación de las mismas:

$$y' = pe^{px}$$

$$y'' = p^2 e^{px}$$

$$y''' = p^3 e^{px}$$

....

....

$$y^{(n)} = p^n e^{px}$$

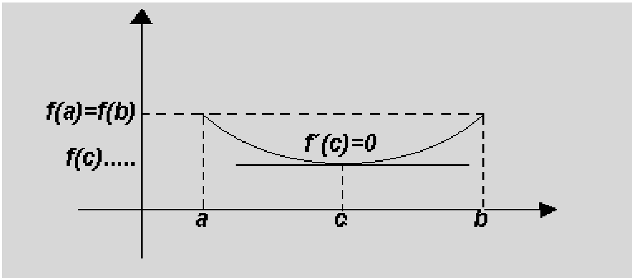
Conocida la fórmula que nos da la derivada n-ésima, podemos aplicarla al orden concreto que nos interesa

Para *p = 3* y *n = 5* $y^{(5)} = 3^5 e^{3x} = 243 e^{3x}$

10.2 TEOREMA DE ROLLE

Si una función f (x) es continua en un intervalo cerrado [a,b], y derivable en su interior (a,b) y f(a)=f(b), entonces existe al menos un punto interior c tal que f´(c)=0

Geométricamente este teorema nos indica que dentro de dicho intervalo existe al menos un punto en que la tangente es paralela al eje de abscisas



Ejemplo 3. Dada la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$, estudiar si verifica la condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. En el caso de que lo cumpla, encontrar el punto donde se anula la derivada

La función *f (x)* es continua en todo el intervalo ,y derivable en su interior. Por otra parte

$f(0 = (4) = 5$, es decir, toma el mismo valor en los extremos del intervalo, luego cumple las condiciones del teorema de Rolle.

Para encontrar el punto "c" , calculemos la derivada e igualemos a cero:

$$f'(c) = 2c - 4 = 0 \Rightarrow c = 2 \in [0,4]$$

10.3 TEOREMA DE LAGRANGE O DE LOS INCREMENTOS FINITOS

Este teorema es una generalización del teorema de Rolle:

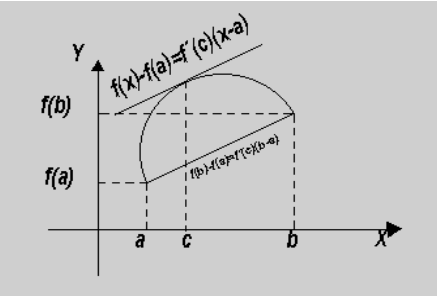
Si una función f(x) es continua en un intervalo cerrado [a.b] y derivable en su interior, entonces existe el menos un punto c interior al intervalo (a,b) tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

La expresión anterior puede escribirse en la forma:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$ o de los incrementos finitos

Desde un punto de vista geométrico, el teorema nos dice que si la gráfica de la función tiene tangente en todo punto del arco que une los puntos a y b, entonces hay por lo menos un punto de la gráfica en el que la tangente es paralela a la cuerda.



Ejemplo 4. Estudiar si la función $f(x) = |x-1|$ cumple el teorema de Lagrange en el intervalo [0,2]

La función $f(x) = |x-1|$ no es derivable en el punto *x = 1* , luego no reune las condiciones para que se pueda aplicar el teorema.

Ejemplo 5. Encontrar el punto de la curva $y = 2x^2 - 1$, en el que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos x=0 con x=2

Los extremos de la cuerda son los puntos $(0,-1)$ y $(2,7)$; luego

$$\frac{7-(-1)}{2-0} = f'(c) = 4c \quad , \text{ de donde } c = 1$$

10.4 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY

Sean f y g dos funciones reales definidas en el intervalo [a,b]. Si *f* y *g* son continuas en [a,b] y derivables en]a,b[, entonces existe al menos un punto $c \in]a,b[$ tal que:

$$f'(c)\left[g(b(-g(a)\right] = g'(c)\left[f(b) - f(a)\right]$$

Si ademas se cumple que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a,b[$, o bien que $g(b) \neq g(a)$ y $f'(x)$ y $g'(x)$ no se anulan simultáneamente en $x \in]a,b[$; entances el teorema se puede expresar como:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

10.5 APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS AL CALCULO DE LÍMITES. REGLA DE L´HÔPITAL

En el tema 2 estudiamos algunos procedimientos para encontrar los límites cuando al aplicar la técnica general nos aparecía una de las indeterminaciones:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{\infty},\ \infty^{0}$$

En este punto aplicaremos la regla de L´Hôpital que nos permite resolverlas.

Regla de L´Hôpital: *Sean f(x) y g(x) dos funciones continuas que verifican las siguientes propiedades:*

$$\underset{x\to x_0}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to x_0}{Lím}\, g(x)=0$$

En un entorno de x_0 $g(x)\neq 0$

Existen $f'(x)$ *y* $g'(x)$*, en un entorno de* x_0

Existe $\underset{x\to x_0}{Lim}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces se cumple:

$$\underset{x\to x_0}{Lím}\frac{f(x)}{g(x)}=\underset{x\to x_0}{Lím}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla es valida también si la tendencia es $+\infty$ o $-\infty$

Si en $x=x_0$ se anulan las funciones y las derivas primeras, segundas, terceras, ...,(n-1)-ésimas, y no son ceros las derivadas $f^{(n)}$.y $g^{(n)}$, el teorema anterior se generaliza en la forma:

$$\underset{x\to x_0}{Lím}\frac{f(x)}{g(x)}=\underset{x\to x_0}{Lím}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

Ejemplo 6. Calcular $\underset{x\to 2}{Lim}\frac{Sen(x-2)}{x-2}$

Al aplicar la regla general obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ .Como las funciones numerador y denominador cumplen las condiciones para poder aplicar la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 2} \frac{Sen(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{Cos(x-2)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Ejemplo 7. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{Ln\,Cos\ x}{x}$

Al aplicar la regla general obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ .Como las funciones numerador y denominador cumplen las condiciones para poder aplicar la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{Ln\,Cos\ x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{Cos\ x}(-Sen\ x)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{-Tg\ x}{1} = 0$$

Ejemplo 8. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x \text{ - } sen\ x}{x \text{ - } tg\ x}$

Al aplicar la regla general obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ .Como las funciones numerador y denominador cumplen las condiciones para poder aplicar la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - tanx} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{0}{0}$$; seguimos aplicando la regla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{-\frac{2\ sen\ x}{cos^3 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^3 x}{-2} = -\frac{1}{2}$$

En algunos casos, para poder aplicar la regla de L´Hôpital, debemos realizar algunas transformaciones para que la función tome la forma adecuada:

Ejemplo 9. Calcular $\lim_{x\to 0} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

Al aplicar la regla general obtenemos una indeterminación de la forma $0\cdot\infty$ que podemos transformar en la forma $\frac{\infty}{\infty}$ escribiendo la función en la forma $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$ a la que aplicamos la regla de L´Hôpital: $\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$

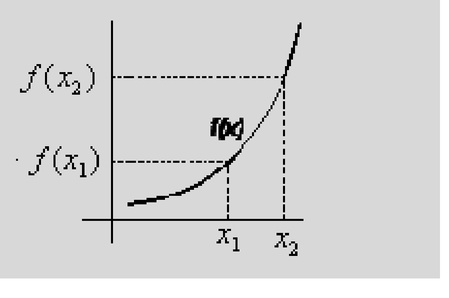
10.6 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

En este apartado emplearemos la primera derivada para estudiar las distintas zonas de crecimiento y decrecimiento de una función

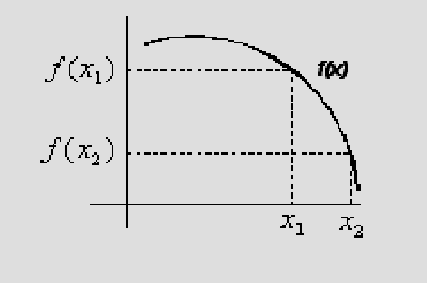
*Una función $f(x)$ es **estrictamente creciente** en un intervalo, si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del intervalo , se cumple que si $x_2 > x_1$ entonces $f(x_2) > f(x_1)$*

*Una función $f(x)$ es **estrictamente decreciente** en un intervalo, si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del intervalo , se cumple que si $x_2 > x_1$ entonces $f(x_2) < f(x_1)$*

Si observamos la gráfica de la función, podemos asociar los intervalos de crecimiento (decrecimiento) a aquellos tramos en que, al aumentar la abscisa, las ramas van hacia la parte positiva de eje de ordenadas (hacia la parte negativa)



$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$



$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Si la variable independiente "*x*" de una función "*f(x)*" pasa de un valor x_0 a x_0+h para $h>0$, se cumplirá :

$$f(x_0+h) - f(x_0) > 0 \text{ si } f(x) \text{ es creciente} \quad \text{mientras que}$$
$$f(x_0+h) - f(x_0) < 0 \text{ si } f(x) \text{ es decreciente}$$

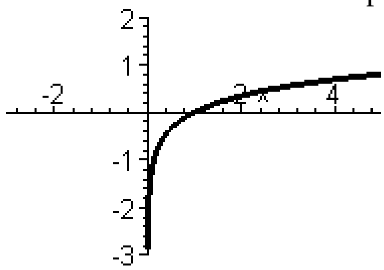
luego:

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{Lim} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0 \text{ si } f(x) \text{ es creciente}$$
$$f'(x) = \underset{x\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < 0 \text{ si } f(x) \text{ es decreciente}$$

Ejemplo 10. Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = Ln\sqrt{x}$ en el punto x=1

Veamos el signo de la derivada en ese punto:

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} > 0$; la función es creciente en ese punto como puede verse en el gráfico de la función:



Ejemplo 11. Estudiar las zonas de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$

Determinemos primero los puntos en los que la curva no es creciente ni decreciente. Lógicamente esos puntos será aquellos en los que la derivada se anula:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 \;\rightarrow\; f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

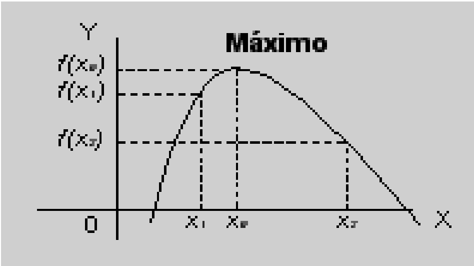
Como la función está definida en toda la recta real , $(-\infty, \infty)$, estudiamos el crecimiento en las zonas $(-\infty,-3)$, (-3,1) y $(1,\infty)$

- en el intervalo $(-\infty,-3)$ $f'(x) > 0$, luego la función es creciente
- en el intervalo $(-3,1)$ $f'(x) < 0$, luego la función es decreciente
- y en el intervalo $(1,\infty)$ $f'(x) > 0$, la función será creciente

10.7 EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN :MÁXIMOS Y MÍNIMOS

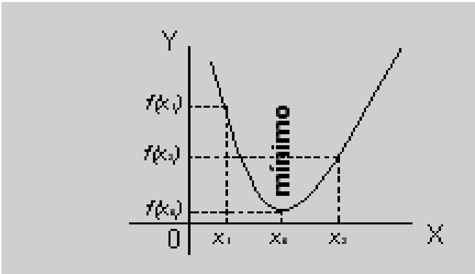
Si en un punto $(x_0, f(x_0))$ la función pasa de creciente a decreciente , se dice que en dicho punto tiene un **máximo relativo**. En dicho punto se cumple que para todo entorno de x_0 ,y distinto de x_0 , la función toma un valor menor que en x_0 ; es decir

$$\forall\, x \in E(x_0) \text{ tal que } x \neq x_0\,,\quad f(x_0) > f(x)$$



Si en un punto $(x_0, f(x_0))$ la función pasa de decreciente a creciente , se dice que en dicho punto tiene un **mínimo relativo**. En dicho punto se cumple que para todo entorno de x_0 ,y distinto de x_0 , la función toma un valor mayor que en x_0 ; es decir

$$\forall\, x \in E(x_0) \text{ tal que } x \neq x_0\,,\quad f(x_0) < f(x)$$



A la vista de los expuesto en el apartado 4.4 sobre el crecimiento de un función en un punto, podemos afirma que: *"Si (x$_0$, f(x$_0$)) es un punto extremo de la función, entonces f´(x)=0,* ya que en dicho punto la función no es ni creciente ni decreciente.

Ejemplo 12. Encontrar los máximos y mínimos relativos de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$

Como hemos visto en el ejemplo anterior, la derivada de la función se anula para los valores $x = -3$ y $x = 1$

En $x = -3$ la función pasa de creciente a decreciente, luego para ese valor de la abscisa hay un máximo $f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 3 = 30$; es decir el punto $(-3, 30)$ es un maximo relativo de la función

En $x = 1$ la función pasa de decreciente a creciente, por lo que para dicho valor de la abscisa hay un mínimo ; $f(1) = 1^3 + 3(1)^2 - 9(1) + 3 = -2$

Es decir el punto $(1, -2)$ es un mínimo relativo de la función

Ejemplo 13. Buscar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

Para encontrar los extremos relativos determinamos primero qué valores de x anulan la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \quad \Rightarrow\ f'(x)=0 \text{ para} \begin{cases} \mathrm{x}=0 \\ \mathrm{x}=2 \end{cases}$$

Estudiemos el comportamiento de la función en entornos de dichos puntos:

-En un entorno de $x=0 \quad (0-\varepsilon\,,0+\varepsilon)$

$sig \quad f'(0-\varepsilon)=sig\,\dfrac{(-\varepsilon)(-\varepsilon-2)}{(-\varepsilon-1)^2}=sig(-\varepsilon)(-\varepsilon-2)=\, positivo$, luego $f(x)$ es creciente a la izquierda de 0

$sig \quad f'(0+\varepsilon)=sig\,\dfrac{(\varepsilon)(\varepsilon-2)}{(\varepsilon-1)^2}=sig(\varepsilon)(\varepsilon-2)=negativo$, luego $f(x)$ es decreciente a la derecha de 0

Es decir, en $x=0$ la función pasa de creciente a decreciente, por lo que en $(0,\ f(0))$ hay un máximo relativo.

-En un entorno de 2 $\quad (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$

$sig \quad f'(2-\varepsilon)=sig\,\dfrac{(2-\varepsilon)(2-\varepsilon-2)}{(2-\varepsilon-1)^2}=sig(2-\varepsilon)(-\varepsilon)=negativo$. luego $f(x)$ es decreciente a la izquierda de, 2

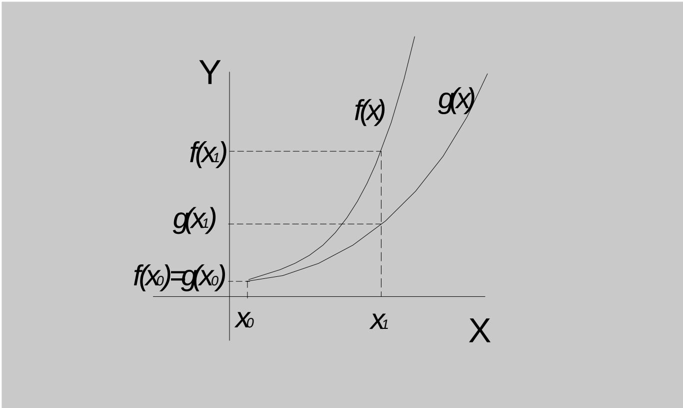
$sig \quad f'(2+\varepsilon)=sig\,\dfrac{(2+\varepsilon)(2+\varepsilon-2)}{(2+\varepsilon-1)^2}=sig(2+\varepsilon)(\varepsilon)=\, positivo$, la $f(x)$ es creciente a la derecha de 2.

Como la función pasa, en $x=2$ de decreciente a creciente, e, $(2,\ f(2))$ hay un mínimo relativo.

Posteriormente veremos como en algunos casos podemos valernos del signo de la segunda derivada para la determinación de máximos y mínimos.

10.8 CURVATURA DE UNA FUNCIÓN. CONCAVIDAD

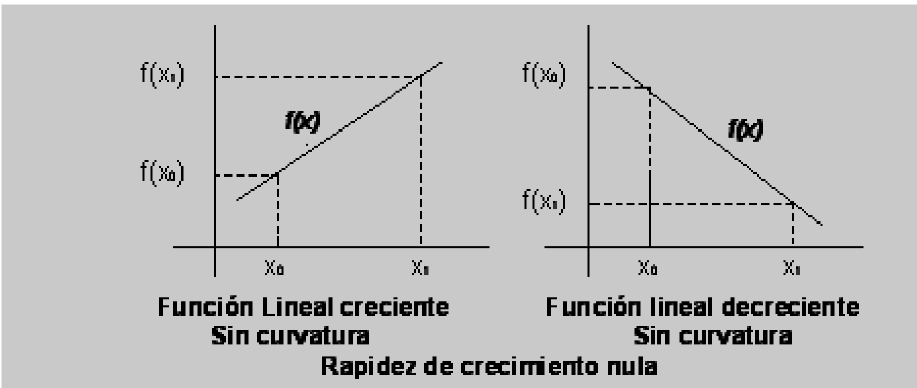
En apartado anteriores hemos estudiado el crecimiento y decrecimiento de un función en un intervalo. En la siguiente figura se han representado dos funciones crecientes sobre un mismo sistema cartesiano:

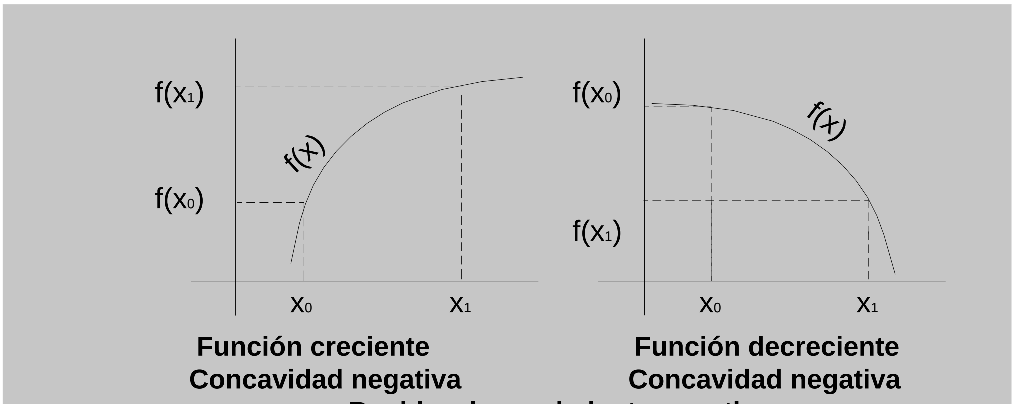


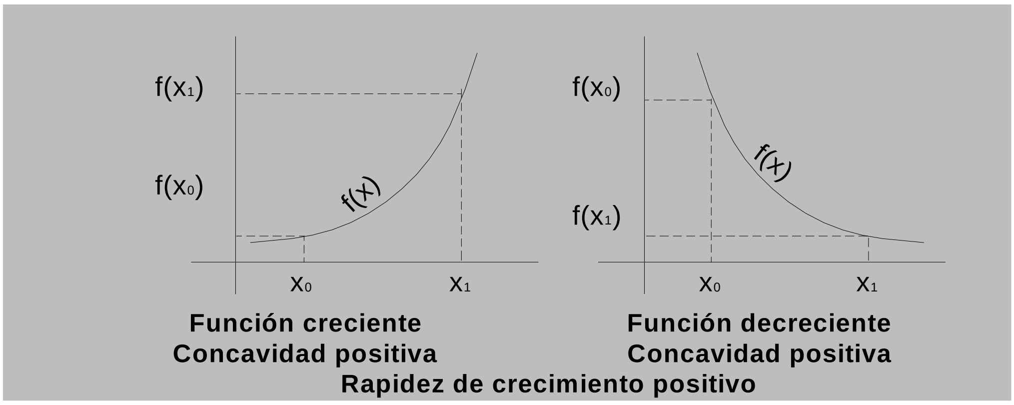
Aunque ambas son crecientes observamos que la función $f(x)$ crece más deprisa que la función $g(x)$;de forma que para un mismo incremento de la variable $x_1 - x_0$, $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} > \dfrac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0}$

Para caracterizar la distinta rapidez de crecimiento o decrecimiento de una función empleamos el concepto de **curvatura.**

En las siguientes figuras se han representado , para un mismo intervalo, distintas curvaturas con los nombres que reciben:







A la vista de las figuras anteriores podemos afirmar que si $f(x)$ es una función no-lineal, entonces los máximos se encontrarán en una zona de concavidad negativa y los mínimos en zonas de concavidad positiva..

Hemos visto en apartados anteriores que el crecimiento de un función en un punto lo determinamos por su derivada, es decir si $f'(x_0) > 0$ la función es creciente en x_0, mientras que si $f(x_0) < 0$ la función es decreciente. Por lo tanto $y = f'(x)$ es un función que nos dá el valor de la tasa de crecimiento para cada punto

Si determinamos el signo de la derivada de $f'(x)$ en x_0, sabremos si la tasa de crecimiento es creciente o decreciente en dicho punto , según sea el signo de esa segunda derivada.

Por todo ello podemos determinar el signo de la concavidad en un punto mediante el signo de la segunda derivada en dicho punto, de forma que.

Si $f''(x_0) > 0$ entonces $f(x_0)$ tiene concavidad hacia arriba (positiva)
Si $f''(x_0) < 0$ entonces $f(x_0)$ tiene concavidad hacia abajo (negativa)
Si $f''(x_0) = 0$ entonces $f(x_0)$ no tiene concavidad en dicho punto

Ejemplo 14. Encontrar las distintas zonas de curvatura de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$

Buscamos primero los puntos en los que no hay concavidad igualando a cero la segunda derivada

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$
$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow 0 = 6x + 6 \Rightarrow x = -1$$

Para $x = -1$ no hay concavidad , por lo que estudiamos el signo de la segunda derivada en cada uno de los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(-1,\infty)$, ya que la función está definida en toda la recta real:

En el intervalo $(-\infty,-1)$ $f''(x) < 0$ luego la función tiene concavidad hacia abajo
En el intervalo $(-1,\infty)$ $f''(x) > 0$ luego la función tiene concavidad hacia arriba

Si en x_0 la función cambia el sentido de la concavidad, se dice que en dicho punto ha una **inflexión** o que **(x_0 , *f(x₀)*) es un punto de inflexión.**

En el ejemplo 16, el punto en $x = -1$ hay una inflexión ya que la función pasa de concavidad negativa a concavidad positiva; es decir el punto $(-1, f(-1)) = (-1,14)$ es un punto de inflexión de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$.

Como hemos visto anteriormente , en una función no-lineal, los puntos máximos se encuentran en una zona de concavidad negativa, mientras que los puntos mínimos se encuentran en una zona de concavidad positiva de aquí que podamos emplear el siguiente criterio para la determinación de los puntos extremos de una función:

-criterio de la segunda derivada para la determinación de máximos y mínimos relativos:

Si x_0 es un punto tal que $f'(x_0) = 0$, entonces $\begin{cases} si\ f(x_0) > 0\ \ entonces\ x_0\ es\ un\ minimo \\ si\ f(x_0) < 0\ \ entonces\ x_0\ es\ un\ maximo \end{cases}$

Ejemplo 15. Encontrar los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$, por el criterio de la segunda derivada.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{x} = \text{-3} \\ \text{x} = 1 \end{cases} \qquad f''(x) = 6x+6 \Rightarrow \begin{cases} f''(-3) < 0 \Rightarrow \text{x} = \text{-3 es un máximo} \\ f''(1) > 0 \quad \Rightarrow \text{x} = 1 \text{ es un máximo} \end{cases}$$

10.9 PROBLEMAS SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

El calculo de máximos y mínimo de funciones nos permite resolver con facilidad algunos tipos de problemas en los que se trata de optimizar una función. Veamos algunos ejemplos que nos sirvan de modelos:

Ejemplo 16. Encontrar dos número cuya suma sea 40 y su producto sea máximo

Llamemos x e y a los números buscados, entonces:

$$\begin{cases} x+y=40 \\ \textit{función a màximizar} = P = xy \end{cases}$$

entonces $P = x(40-x)$

derivando $P' = 40-2x$

igualando a cero y despejando $40-2x=0 \Rightarrow \text{x} = 20$

como la segunda derivada es negativa la función tiene concavidad negativa, lo que el punto anterior es un máximo de la función.

De esta forma los números buscados so el 20 y el 20

Ejemplo 17. Calcular los lados de un triángulo rectángulo de área máxima si su hipotenusa mide 10 cm.

Sean x,y, 10 los lados del triángulo:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 10^2 \\ A = xy \end{cases}$$

$$A = x\sqrt{(100-x^2} = \sqrt{100x^2-x^4}$$

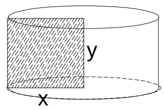
$$A' = \frac{2x100-4x^3}{2\sqrt{100x^2-4x^4}} \Rightarrow \text{A}' = 0 \Rightarrow 200\text{x} - 4\text{x}^3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\sqrt{50} \\ x=\sqrt{50} \end{cases}$$

Estudiando el signo de la derivada en entornos de dichos puntos vemos que x= $\sqrt{50}$ es un máximo

Ejemplo 18. Un rectángulo de 60 cm de perímetro genera un cilindro al girar sobre uno de sus lados, Calcular las dimensiones del rectángulo para que el volumen generado sea máximo.

Sean x,y los lados del rectángulo

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ V = \pi\, x^2 y = \pi\, x^2 (30 - x) \end{cases}$$



$$V' = \pi\,(60x - 3x^2) \quad \to V' = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} \text{x} = 0 \\ \text{x} = 20 \end{cases}$$

Volviendo a derivar

$$V'' = 60\pi - 6\pi\, x \quad \to \begin{cases} \text{si } \ \text{x} = 0 \quad V' > 0 \Rightarrow V \text{ es mínimo} \\ \text{si } \ \text{x} = 20 \quad V'' < 0 \Rightarrow V \text{ es máximo} \end{cases}$$

Luego las dimensiones del rectángulo que da volumen máximo son 20 y 10 cm.

Ejemplo 19. Calcular las dimensiones de un rectángulo de 36 cm^2 de área para que su perímetro sea mínimo.

Sean x e y los lados del rectángulo

$$\begin{cases} xy = 36 \\ p = 2x + 2y = 2x + 2\dfrac{36}{x} \end{cases}$$

$$p' = 2 - \frac{72}{x^2} \quad \to \; p' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 6 \end{cases}$$

En $x = 6$ la función pasa de decreciente a creciente. Por lo tanto es un punto de mínimo; de donde las dimensiones del rectángulo buscado son 6x6, es decir se trata de un cuadrado.

10.10 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Se llama gráfica de una función $f(x)$ al conjunto de puntos del plano de coordenadas $(x, f(x))$

Una función se podría representar gráficamente dibujando cada punto una vez calculadas sus coordenadas; pero este método, además de ser muy laborioso, no resulta válido ya que por muchos puntos que dibujemos puede suceder que no lleguemos a caracterizar la función

Por todo ello en la práctica se buscan aquellos elementos que puedan darnos un mejor conocimiento de las características de la gráfica. Todos los conocimientos adquiridos hasta este momento pueden sernos muy útiles a la hora de querer representar gráficamente una función.

Aunque hoy en día el empleo de los ordenadores y de ciertas calculadoras facilitan la representación gráfica, el conocer los pasos necesarios para realizar la representación deben formar parte de la formación matemática.

Con el fin de estudiar los pasos a seguir tomaremos como ejemplo la función $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$

a) DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN:

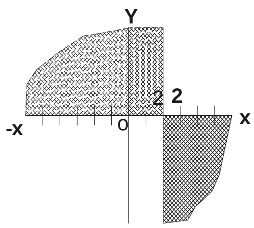
Estudiando el dominio y el recorrido de una función determinamos las regiones del plano donde existe la función

Ejemplo 20. Estudiar el dominio y el recorrido de la función $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$.

Resulta fácil de ver que $Dom\ f=\Re-\{2\}$

Para $\begin{cases} x<2 & f(x)<0 \\ x>2 & f(x)>0 \end{cases}$

En el siguiente gráfico hemos sombreado las regiones en las que no existe la función:



b) SIMETRIAS y PERIODICIDAD

b1) Simetría respecta al eje de ordenadas

La función $f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas (x=0) si la función es par, es decir si:

$$f(-x)=f(x)$$

b2) Simetría respecto al origen

La función $f(x)$ es simétrica respecto al origen (0,0) si la función es impar, es decir si:

$$f(-x)=-f(x)$$

b3) Periodicidad

La función $f(x)$ es periódica si existe un número T (periodo), no igual a cero, tal que

$$f(x+T)=f(x)$$

Ejemplo 21. Estudiar la simetría y la periodicidad de la función $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$.

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)-2}=\frac{x^2}{-x-2}\neq\begin{cases}-f(x)\\ f(x)\end{cases}$$, luego la función no es ni par ni impar, por lo que no tiene simetrías.

$$f(x+T)=\frac{(x+T)^2}{(x+T)-2}=\frac{x^2+2xT+T^2}{x+T-2}\neq f(x)$$, por lo que la función no tiene periodo para ningún valor de T distinto de cero

c) ASÍNTOTAS

Recordemos que se llama asíntota de una curva a la recta tangente a la curva en el infinito.

c1) Asíntotas verticales

La recta $x=a$ es una asíntota vertical si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

c2) Asíntotas horizontales

La recta $y=b$ es una asíntota horizontal si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$

c3) Asíntotas oblicuas

La recta $y=mx+n$ es una asíntota oblicua si

$$\begin{cases} m=\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) \quad \text{ó} \quad m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\\ n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]\end{cases}$$

Ejemplo 22. Encontrar las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$.

-Verticales:

Como $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x-2}=\infty$ la recta $x=2$ es una asíntota vertical

-Horizontales:

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-2}=\infty$ la función no tiene asíntotas horizontales

-Oblicuas:

Veamos si podemos construir la recta $y=mx+n$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=1=m$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-2}-1x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x^2+2x}{x-2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{x-2}\right]=2$$

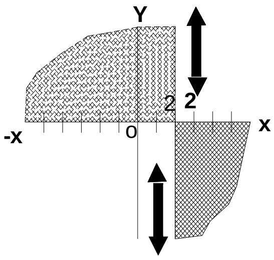
de donde la recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua

Antes de seguir buscando elementos para el trazado de la gráfica conviene, una vez determinadas las asíntotas, determinar la posición de la gráfica respecto a las asíntotas:

Ejemplo 23. Estudiar la posición de la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$. Respecto de sus asíntotas

-respecto asíntota vertical x=2

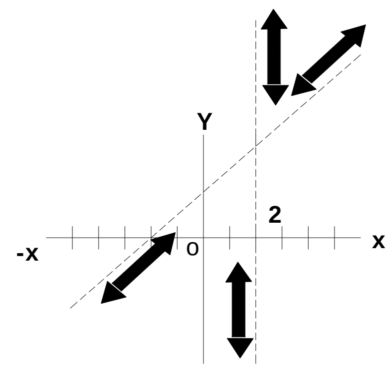
Como $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{x-2} = +\infty \end{cases}$ la posición de la gráfica respecto esta asíntota será la indicada en la figura



- respecto a la asíntota oblicua y=x+2

Para cualquier abscisa x, la expresión $\dfrac{x^2}{x-2} - (x+2)$, (diferencia entre la función y la recta asíntota, será positiva si la función está por encima de la recta y negativa en caso contrario:

$$\frac{x^2}{x-2} - (x+2) = \frac{x^2 - (x+2)(x-2)}{x-2} = \frac{4}{x-2} \text{ es} \begin{cases} < 0 \text{ si } x < 2 \\ > 0 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$



Con la información obtenida hasta este momento normalmente ya tenemos una idea de los lugares por donde tendremos que trazar la curva

d) Monotonía: zonas de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Ejemplo 24. Estudiar la monotonía de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$. Y encontrar sus puntos extremos.

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(x)=0\,\text{si}\begin{cases}x=0\\x=4\end{cases}$$

para $x<0$ $f'(x)>0$ luego la función es creciente

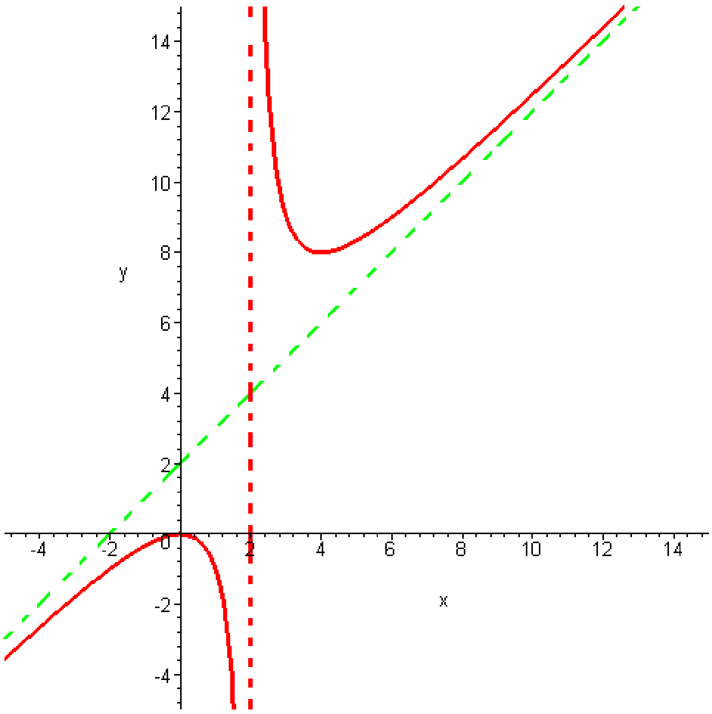
para $x>0$ $f'(x)<0$ luego la función es decreciente

Por ello el punto $(0,f(0))=(0,0)$ es un máximo relativo de la función

para $x<4$ $f'(x)<0$ luego la función es decreciente

para $x>4$ $f'(x)>0$ luego la función es creciente

Por ello el punto $(4,f(4))=(4,8)$ es un mínimo relativo de la función



En el ejemplo, con todos los datos obtenidos hemos podido representar la gráfica; sin embargo en muchas ocasiones, necesitamos completar la información realizando un estudio de la curvatura

Ejemplo 25. Estudiar la curvatura de $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$. y encontrar, si los hay, los puntos de inflexión.

$$f''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4}=\frac{8}{(x-2)^3}$$ que no se anula para ningún valor de x.

Dado que x=2 (que anula el denominador) es una asíntota, analizamos los signos de la segunda deriva a la izquierda y a la derecha de x=2

A la izquierda de $x=2$ $f''(x)<0$ luego la función tiene concavidad negativa

A la derecha de $x=2$ $f''(x)>0$, la función tiene concavidad hacia arriba

Generalmente, siguiendo los pasos anteriores, tenemos suficientes datos para representar la gráfica. En caso de necesitarlo, la información anterior se puede completar buscando algunos puntos de la gráfica: puntos de corte con los ejes, etc.

La gráfica corta al eje de abscisas en los puntos solución de la ecuación $f(x)=0$

La gráfica corta al eje de ordenadas en los puntos $y = f(0)$

Ejemplo 26. Encontrar los puntos en que la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ corta a los ejes de coordenadas

Cortes con el eje de abscisas $f(x) = 0$ -> $0 = \dfrac{x^2}{x-2} \Rightarrow x = 0$

Cortes con el eje de ordenadas $x = 0$ -> $y = \dfrac{0^2}{0-4} \Rightarrow y = 0$