

EJERCICIOS DETERMINANTES.

1º Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

- a) Usando la Regla de Sarrus.
- b) Desarrollando por los elementos de la primera columna.

2º Obtén el valor del determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3º Calcula el rango de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 3 & -1 \\ 12 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4º ¿Para qué valor de m el rango de esta matriz es 2?

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

5º Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real. Calcular el rango de A según los valores del parámetro a .

6º Obtén el valor de a para que el rango de la matriz A sea igual a 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix}$$

7º/ Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

determinar la matriz $X = (A^{-1}B^t)$, donde A^{-1} es la matriz inversa de A y B^t es la matriz traspuesta de B .

8º/ Encuentra el valor de a que hace que la siguiente matriz no tenga inversa.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

9º/ Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) Determine para qué valores del parámetro m existe A^{-1} .

b) Calcule A^{-1} para $m=2$.

10º/ Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores de m para los cuales tiene inversa.

b) Haciendo $m=2$, encontrar la matriz X que cumple: $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

11º/ Resolver la ecuación matricial $A + BX = I$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e } I \text{ es la matriz identidad de orden tres.}$$

12º/ Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar la matriz X que verifica la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13º/ Determinar la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = I$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14º/ Determinar la matriz X que verifica la ecuación matricial $A \cdot X + B = C$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

15º/ Determinar la matriz X que verifica la ecuación $A^2 \cdot X - B = A \cdot X$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES:

1º Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

a) Usando la Regla de Sarrus.

b) Desarrollando por los elementos de la primera columna.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 7 + 6 - 84 - 9 = -80$$

b)

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) + 2 \cdot (-42 + 3) + 1 \cdot 7 = -9 - 78 + 7 = -80$$

2º Obtén el valor del determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Lo podemos hacer haciendo ceros, por ejemplo en la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + F_1$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1$$

$$F_4 \rightarrow F_4 - 3F_1$$

Lo podemos hacer desarrollando el determinante por adjuntos, por ejemplo por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

(desarrollamos los determinantes y seguimos, nos tiene que dar 1)

3º/ Calcula el rango de las matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 3 & -1 \\ 12 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $|A| = -18 + 4 + 2 + 12 = 0$, luego no tenemos ningún menor de orden 3 distinto de cero, pero si hay menores de orden 2 distinto de cero, por ejemplo el formado por las dos primeras filas y columnas: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \Rightarrow r(A) = 2$.

$$b) B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 3 & -1 \\ 12 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_1}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(B) = 2$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow r(C) = 2$$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $|D| = -16 - 36 + 16 - 3 = 39 \neq 0 \Rightarrow r(D) = 3$ (tenemos un menor de orden 3, el propio determinante de la matriz distinto de cero).

4º/ ¿Para qué valor de m el rango de esta matriz es 2?

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallamos el determinante de la matriz e igualamos a cero, para saber en qué valor el rango de la matriz no es 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -7m - 120 + 72 + 30m + 112 - 18 = 23m + 46 = 0 \Rightarrow m = \frac{-46}{23} = -2$$

Por tanto, para $m = -2$, tenemos que la matriz no es de rango 3, pero si de rango 2, pues hay menores de orden 2 distintos de cero.

5º Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real. Calcular el rango de A según los valores del parámetro a .

Hallamos el determinante de A e igualamos a cero:

$$|A| = 3a + 12 + 15 - 18 - 2a - 15 = a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

- Si $a \neq 6 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$
- Si $a = 6$:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, tenemos menores de orden 2 distintos de cero, por ejemplo el formado por las

dos primeras filas y columnas: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$.

6º Obtén el valor de a para que el rango de la matriz A sea igual a 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix}$$

Hacemos ceros en la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 7 & -6 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

Para que el rango sea 2, la última fila debería ser nula, luego: $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$.

7º/ Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

determinar la matriz $X = (A^{-1}B^t)$, donde A^{-1} es la matriz inversa de A y B^t es la matriz traspuesta de B .

Hallamos A^{-1} :

$$|A|=1 \quad \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente calculamos la matriz X :

$$X = (A^{-1}B^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

8º/ Encuentra el valor de a que hace que la siguiente matriz no tenga inversa.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabemos que una matriz no tiene inversa si y solo si su determinante es cero.

Hallamos entonces, el determinante de la matriz e igualamos a cero:

$$|M| = 45 + 2a - 5 - 2a = -4a + 40 = 0 \Rightarrow a = \frac{-40}{-4} = 10$$

9º/ Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) Determine para qué valores del parámetro m existe A^{-1} .

b) Calcule A^{-1} para $m=2$.

a) Existe la matriz inversa si y solo si el determinante no es cero:

$$|A| = -m^2 + m + 6 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \frac{4}{-2} = -2 \\ \frac{-6}{-2} = 3 \end{cases}$$

- Si $m = -2$ ó $m = 3$, la matriz A no tiene inversa.
- Si $m \neq -2$ y $m \neq 3$, la matriz A si tiene inversa.

b) Caso $m=2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -4 + 2 + 6 = 4 \quad \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/2 \\ -3/2 & -1/4 & 3/2 \\ -1/2 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

10% Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores de m para los cuales tiene inversa.

b) Haciendo $m=2$, encontrar la matriz X que cumple: $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) A tiene inversa si y solo si su determinante no es cero.

$$|A| = 6 - m^2 - 1 = 5 - m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = 5 \Rightarrow m = \pm\sqrt{5}$$

- Si $m = \sqrt{5}$ ó $m = -\sqrt{5}$, la matriz A no tiene inversa.
- Si $m \neq \sqrt{5}$ y $m \neq -\sqrt{5}$, la matriz A si tiene inversa.

b) $m=2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B$$

$$XA = B$$

Multiplicando A^{-1} por la derecha:

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$XI = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

Calculamos A^{-1} :

$$|A| = 1 \quad \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 12 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos finalmente la matriz X :

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11º Resolver la ecuación matricial $A+BX=I$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e } I \text{ es la matriz identidad de orden tres.}$$

Despejamos la matriz X :

$$A+BX=I$$

$$BX=I-A$$

Multiplicamos B^{-1} por la izquierda:

$$B^{-1}BX=B^{-1}(I-A)$$

$$X=B^{-1}(I-A)$$

Calculamos B^{-1} :

$$|B|=1 \quad \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot (\text{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos finalmente X :

$$X = B^{-1}(I-A) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 14 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

12º/ Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar la matriz X que verifica la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Despejamos la matriz X de la ecuación:

$$A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$$

$$A \cdot B \cdot X - C \cdot X = I$$

$$(A \cdot B - C) \cdot X = I$$

Multiplicamos $(A \cdot B - C)^{-1}$ por la izquierda:

$$(A \cdot B - C)^{-1} \cdot (A \cdot B - C) \cdot X = (A \cdot B - C)^{-1} \cdot I$$

$$I \cdot X = (A \cdot B - C)^{-1}$$

$$\boxed{X = (A \cdot B - C)^{-1}}$$

Calculamos previamente la matriz $A \cdot B - C$:

$$A \cdot B - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora su matriz inversa:

$$\boxed{(A \cdot B - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}}$$

Por tanto la solución:

$$\boxed{X = (A \cdot B - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}}$$

13º/ Determinar la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = I$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la ecuación:

$$A \cdot X \cdot B = I$$

Multiplicamos A^{-1} por la izquierda y B^{-1} por la derecha:

$$A^{-1} A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1}$$

$$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1}$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B^{-1}}$$

Calculamos A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos B^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución es:

$$X = A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}}$$

14º/ Determinar la matriz X que verifica la ecuación matricial $A \cdot X + B = C$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Despejamos la matriz X de la ecuación:

$$A \cdot X + B = C$$

$$A \cdot X = C - B$$

Multiplicamos A^{-1} por la izquierda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot (C - B)}$$

Calculamos A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Y finalmente calculamos la solución:

$$X = A^{-1} \cdot (C - B) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -17 \\ -4 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -17 \\ -4 & -1 & 10 \end{pmatrix}}$$

15º/ Determinar la matriz X que verifica la ecuación $A^2 \cdot X - B = A \cdot X$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la ecuación:

$$A^2 \cdot X - B = A \cdot X$$

$$A^2 \cdot X - A \cdot X = B$$

$$(A^2 - A) \cdot X = B$$

Multiplicamos $(A^2 - A)^{-1}$ por la izquierda:

$$(A^2 - A)^{-1} \cdot (A^2 - A) \cdot X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B}$$

Calculamos $A^2 - A$ previamente, resultando:

$$A^2 - A = A \cdot A - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y posteriormente hallamos $(A^2 - A)^{-1}$, obteniendo:

$$(A^2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, hallamos la solución:

$$X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$