

.....
1º.- Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + z = \lambda \\ \lambda x + 2y - z = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - 2z = 6 \end{cases}$$

- a) determinar razonadamente para qué valores de λ es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible
- b) hallar el conjunto de soluciones del sistema para el caso de compatible indeterminado

Solución:

a)

$$\begin{cases} x - y + z = \lambda \\ \lambda x + 2y - z = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - 2z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda \\ 3\lambda \\ 6 \end{pmatrix}}_B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6, \text{ que se anula para } \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 3$ entonces $\text{Ran}(A) = 3 = \text{Ran}(AB) \Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado

Si $\lambda = -2$ el sistema toma la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}}_B$$

En la matriz A la columna primera y la segunda son iguales (cambiadas de signo) luego:

$$\text{Ran}(A) = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{mientras que } \text{Ran}(AB) = 3 \text{ pues } \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 30$$

luego el sistema es incompatible

Si $\lambda = 3$ el sistema toma la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}}_B$$

en el que $\text{Ran}(A) = 2$ pues $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

y

$$\text{Ran} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \text{Ran} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ran} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Luego el sistema es compatible indeterminado

b)

Para solucionar el sistema en este caso tenemos en cuenta que el sistema es equivalente al:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 - z \\ 3x + 2y = 9 + z \end{cases}$$

que podemos resolver fácilmente por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & -1 \\ 9+z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{15-z}{5} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 3 & 9+x \end{vmatrix}}{|5|} = \frac{4z}{5}$$

2º.-Tenemos cuatro puntos $A(0,0,0)$, $B(0,0,2)$, $C(0,2,0)$ y $D(2,0,0)$. Se pide:

- El volumen de tetraedro $ABCD$
- Ecuación del plano que pasa por B, C y D
- Distancia del origen al plano BCD

Solución:

- Los vectores $\overrightarrow{AB} = [0,0,2]$, $\overrightarrow{AC} = [0,2,0]$ y $\overrightarrow{AD} = [2,0,0]$ delimitan el tetraedro, luego

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \text{ unidades de volumen}$$

b)

los vectores $\overrightarrow{BC} = [0, 2, -2]$ y $\overrightarrow{BD} = [2, 0, -2]$ están en el plano, luego:

$$\begin{cases} x = 2\mu \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - 2\lambda - 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & 2 & 0 \\ z-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + z - 2 = 0$$

c)

La distancia de $(0, 0, 0)$ al plano BCD es:

$$d = \left| \frac{-2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ unidades de longitud}$$

3º.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \leq 0 \\ x - ax^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

¿Existen valores de “a” con los cuales $f(x)$ es derivable en toda la recta real? .
Razona la respuesta y ,si es afirmativa, encuentra dichos valores.

Solución:

$$f'_{\text{auxiliar}}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1 - 2ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

que es derivable dentro de cada rama; para que lo sea en $x = 0$ se debe cumplir:

$$\cos 0 = 1 - 2a \cdot 0$$

que se cumple para cualquier valor de “a”

luego la función es derivable siempre independientemente del valor de “a”

4º.- Determina el mayor área que puede encerrarse en un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 1m.

Solución:

Si x e y son los catetos del triángulo rectángulo buscado, se área es:

$$S = \frac{xy}{2}$$

por otra parte, $x^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$

luego

$$S = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} = \frac{\sqrt{x^2-x^4}}{2}$$

que derivando:

$$S' = \frac{x-2x^3}{2\sqrt{x^2-x^4}} \quad \text{que se anula para} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Dado que por la índole del problema “x” es un cateto y por lo tanto debe valer <1 , por lo que el denominador siempre es positivo; el numerador ($x-3x^3$) determinará el signo de la derivada:

$$\text{Si } x < -\sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow S' < 0 \Rightarrow S \text{ es decreciente}$$

$$\text{Si } x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right) \rightarrow S' > 0 \Rightarrow S \text{ es creciente}$$

$$\text{Si } x \in \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow S' > 0 \Rightarrow S \text{ es creciente}$$

$$\text{Si } x > \sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow S' < 0 \Rightarrow S \text{ es decreciente}$$

Luego para $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ la función toma un valor máximo. Luego el área máxima buscada es:

$$S = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \text{ unidades de área}$$

5º.- En un plano, el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y = \frac{x^2}{4} - x$,

siendo un río el eje OX. En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos la distancia en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60€?

Solución:

La carretera cruza el río en los puntos:

$$\frac{x^2}{4} - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

luego el pinar tiene 4 km a lo largo del río.

El área del pinar será, pues:

$$S = - \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} - x \right) dx = \frac{8}{3} \text{ km}^2 \text{ y el costo } C = \frac{8}{3} \text{ km}^2 \cdot 100 \text{ ha} / \text{km}^2 \cdot 60 \text{ €} / \text{ha} = 160000 \text{ €}$$